Bases y dimensión

Problemas teóricos

Bases de un espacio vectorial

En todos los problemas se supone que V es un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$.

Definición de base. Sean $b_1, \ldots, b_n \in V$. Se dice que la lista $(b_1, \ldots, b_n)$ es una *base* de V si los vectores $b_1, \ldots, b_n$ son linealmente independientes y $\ell(b_1, \ldots, b_n) = V$. Nótese que hablamos solamente de bases *finitas*.

1. Base canónica de $\mathbb{F}^4$. Denotemos por e_1, e_2, e_3, e_4 a los "vectores básicos" de $\mathbb{F}^4$:

$$e_p \coloneqq \left[\delta_{p,j}\right]_{j=1}^{4}$$

Demuestre que para todos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{F}$

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 = \left[\lambda_j\right]_{j=1}^{4}.$$

Demuestre que la lista $(e_p)_{p=1}^4$ es una base de $\mathbb{F}^4$.

2. Base canónica de $\mathbb{F}^n$. Denotemos por $e_1, \ldots, e_n$ a los "vectores básicos" de $\mathbb{F}^n$:

$$e_p \coloneqq \left[\delta_{p,j}\right]_{j=1}^{n}$$

Demuestre que para todos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$

$$\sum_{p=1}^{n} \lambda_p e_p = \left[\lambda_j\right]_{j=1}^{n}.$$

Demuestre que la lista $(e_p)_{p=1}^n$ es una base de $\mathbb{F}^n$.

3. Base canónica de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{F})$. Denotemos por $E_{p,q}$, donde $p \in \{1, 2\}$, $q \in \{1, 2, 3\}$, a las "matrices básicas" de tamaño 2×3:

$$E_{p,q} \coloneqq \left[\delta_{p,i}\delta_{q,j}\right]_{i,j=1}^{2,3}.$$

Escriba las matrices $E_{1,1}$, $E_{1,2}$, $E_{1,3}$, $E_{2,1}$, $E_{2,2}$, $E_{2,3}$ de manera explícita y demuestre que estas matrices forman una base de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{F})$.

4. Base canónica de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$. Denotemos por $E_{p,q}$, donde $p \in \{1, \ldots, m\}$, $q \in \{1, \ldots, n\}$, a las "matrices básicas" de tamaño $m \times n$:

$$E_{p,q} \coloneqq \left[\delta_{p,i}\delta_{q,j}\right]_{i,j=1}^{m,n}.$$

Numeramos estas matrices en el siguiente orden:

$$E_{1,1}, \quad E_{1,2}, \quad \ldots, \quad E_{1,n}, \quad E_{2,1}, \quad \ldots, \quad E_{m,n}.$$

Demuestre que esta lista $(E_{p,q})_{p,q=1}^{m,n}$ es una base de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$.

5. Base canónica del espacio de polinomios de grado ≤ 3. Denotemos por e_j a los monomios:

$$e_0(x) \coloneqq 1, \qquad e_1(x) \coloneqq x, \qquad e_2(x) \coloneqq x^2, \qquad e_3(x) \coloneqq x^3.$$

Demuestre que la lista e_0, e_1, e_2, e_3 es una base de $\mathcal{P}_3(\mathbb{F})$.

6. Base canónica del espacio de polinomios de grado $\le n$. Denotemos por e_j a los monomios:

$$e_0(x) \coloneqq 1, \qquad e_1(x) \coloneqq x, \qquad \ldots \qquad , \qquad e_n(x) \coloneqq x^n,$$

Demuestre que la lista $e_0, e_1, \ldots, e_n$ es una base de $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$.

7. Existencia y unicidad de la expansión de un vector respecto a una base. Sea $b_1, \ldots, b_n$ una base de V y sea $u \in V$. Demuestre que existe una única tupla $x \in \mathbb{F}^n$ tal que

$$u = \sum_{j=1}^{n} x_j b_j.$$

8. Sean $b_1, \ldots, b_n \in V$ tales que para todo $u \in V$ existe una única tupla $x \in \mathbb{F}^n$ tal que

$$u = \sum_{j=1}^{n} x_j b_j.$$

Demuestre que $b_1, \ldots, b_n$ es una base de V.

9. Todas las bases de un espacio vectorial tienen el mismo tamaño. Sean $a_1, \ldots, a_m$ y $b_1, \ldots, b_n$ bases de un espacio vectorial V. Demuestre que $m = n$.

10. Base tiene tamaño máximo entre todos las listas linealmente independientes. Sea $b_1, \ldots, b_n$ una base de V y sean $a_1, \ldots, a_m \in V$ linealmente independientes. Demuestre que $m \le n$.

11. Cualquier lista linealmente independiente máxima por contención es una base. Sean $b_1, \ldots, b_n \in V$ vectores linealmente independientes y tales que para todo $a \in V$ los vectores $b_1, \ldots, b_n, a$ son linealmente dependientes. Demuestre que $b_1, \ldots, b_n$ es una base de V.

12. Base tiene tamaño mínimo entre todas las listas que generan al espacio. Sea $b_1, \ldots, b_n$ una base de V y sean $a_1, \ldots, a_m \in V$ tales que $\ell(a_1, \ldots, a_m) = V$. Demuestre que $m \ge n$.

13. Cualquier lista mínima por contención entre las listas generadoras es una base. Sean $b_1, \ldots, b_n$ vectores del espacio V tales que $\ell(b_1, \ldots, b_n) = V$ y para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$

$$\ell\big((b_i)_{\substack{i \in \{1,\ldots,n\} \\ i \ne j}}\big) \ne V.$$

Es decir, al quitar cualquier vector de la lista $(b_1, \ldots, b_n)$ la lista obtenida ya no genera al espacio. Demuestre que $b_1, \ldots, b_n$ es una base de V.

Dimensión de un espacio vectorial

14. Demuestre que en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ no hay ninguna base (finita).

15. Definición de la dimensión de un espacio vectorial. Sea V un espacio vectorial. ¿Cuándo se dice que V es de dimensión finita?. ¿Cómo se define su dimensión en este caso?. ¿Cuál teorema garantiza que esta definición es correcta?.

16. Criterio de espacio de dimensión finita. Sea V un espacio vectorial. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) Existe una base (finita) de V.

(b) En V existe un conjunto generador finito.

(c) Los tamaños de las listas de vectores linealmente independientes en V están acotados por arriba, es decir, existe un número (finito) n tal que para toda lista $a_1, \ldots, a_m$ linealmente independiente en V se cumple la desigualdad $m \leq n$.

17. Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sean $a_1, \ldots, a_n \in V$ vectores linealmente independientes. Demuestre que $a_1, \ldots, a_n$ es una base de V.

18. Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sean $a_1, \ldots, a_n$ vectores en V tales que $\ell(a_1, \ldots, a_n) = V$. Demuestre que $a_1, \ldots, a_n$ es una base de V.

19. Reducción de una lista de vectores que genera al espacio a una base. Sea V un espacio vectorial y sean $a_1, \ldots, a_m \in V$ tales que $\ell(a_1, \ldots, a_m) = V$. Demuestre que existen $i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, m\}$ tales que $i_1 < \ldots < i_n$ y $a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}$ es una base de V.

20. Ampliación de una lista de vectores linealmente independientes a una base. Sea V un espacio vectorial de dimensión n, sea $m < n$ y sean $a_1, \ldots, a_m$ vectores linealmente independientes. Demuestre que existen vectores $a_{m+1}, \ldots, a_n \in V$ tales que $a_1, \ldots, a_n$ es una base.

Ejemplos de bases

21. Base canónica del espacio $\mathbb{F}^n$. En el espacio $\mathbb{F}^n$ definimos los vectores $e_1, \ldots, e_n$ mediante la fórmula:

$$e_p = \left[\delta_{p,j}\right]_{j=1}^{n}.$$

Demuestre que $e_1, \ldots, e_n$ es una base de $\mathbb{F}^n$.

22. Matrices 2×2 con traza nula. Construya una base del espacio S y calcule su dimensión:

$$S = \big\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{F}) \colon \quad \mathrm{tr}(A) = 0\big\}.$$

23. Matrices triangulares superiores. Construya una base del espacio $\mathfrak{ut}_n(\mathbb{F})$ y calcule su dimensión. Sugerencia: primero considere el caso particular $n = 3$.

24. Matrices triangulares inferiores. Construya una base del espacio $\mathfrak{lt}_n(\mathbb{F})$ y calcule su dimensión. Sugerencia: primero considere el caso particular $n = 3$.

25. Matrices simétricas. Construya una base del espacio $\mathcal{SM}_n(\mathbb{F})$ de las matrices simétricas y calcule su dimensión. Sugerencia: primero considere el caso particular $n = 3$.

26. Matrices antisimétricas. Construya una base del espacio $\mathcal{ASM}_n(\mathbb{F})$ de las matrices antisimétricas y calcule su dimensión. Sugerencia: primero considere el caso particular $n = 3$.

27. Polinomios pares. En el espacio $\mathcal{P}_{2m}(\mathbb{R})$ consideremos el subespacio S de los polinomios pares:

$$S \coloneqq \big\{f \in \mathcal{P}_{2m}(\mathbb{R}) \colon \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = f(x)\big\}.$$

Construya un base de S y calcule $\dim(S)$.

28. Polinomios impares. En el espacio $\mathcal{P}_{2m}(\mathbb{R})$ consideremos el subespacio S de los polinomios impares:

$$S \coloneqq \big\{f \in \mathcal{P}_{2m}(\mathbb{R}) \colon \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = -f(x)\big\}.$$

Construya un base de S y calcule $\dim(S)$.

29. En el espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{F})$ se considera el subespacio S de las matrices cuyas entradas diagonales coinciden:

$$S = \big\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{F}) \colon \quad A_{1,1} = A_{2,2} \big\}.$$

Construya una base de S y calcule $\dim(S)$.

30. Sea S el espacio de los polinomios de grado ≤ 2 que se anulan en el punto 5:

$$S = \{ f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon \quad f(5) = 0 \}.$$

Construya una base de S y calcule $\dim(S)$.

Cambio de base

31. Cambio de las coordenadas de un vector al cambiar la base del espacio. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ bases de V y sea $u \in V$. Demuestre que

$$u_{\mathcal{A}} = P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} u_{\mathcal{B}}.$$

32. Criterio de la iguadad de matrices, caso particular $\boldsymbol{m = 3, n = 2}$. Sean $A, B \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{F})$:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \\ A_{3,1} & A_{3,2} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \\ B_{3,1} & B_{3,2} \end{bmatrix}.$$

Supongamos que $Ax = Bx$ para todo $x \in \mathbb{F}^2$. Demuestre que $A = B$.

33. Criterio de la iguadad de matrices. Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ tales que

$$\forall x \in \mathbb{F}^n \qquad Ax = Bx.$$

Demuestre que $A = B$.

34. Unicidad de la matriz que realiza el cambio de variables. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ bases de V y sea $C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ una matriz tal que

$$\forall v \in V \qquad v_{\mathcal{A}} = C v_{\mathcal{B}}.$$

Demuestre que $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = C$.

35. Composición de dos cambios de base. Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ algunas bases de V. Demuestre que

$$P_{\mathcal{A},\mathcal{C}} = P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}.$$

36. Matriz del cambio trivial de base. Sea $\mathcal{B}$ una base de V. Demuestre que

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = I_n.$$

37. Matriz del cambio inverso de base. Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ bases de V. Demuestre que las matrices $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ y $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$ son invertibles y

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}^{-1}.$$

38. Dada una base "vieja" y una matriz invertible, la base "nueva" se determina de manera única. Sea $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ una base de V y sea $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ una matriz invertible. Demuestre que existe una única base $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ de V tal que $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = C$.

Base y dimensión del subespacio

39. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea S un subespacio de V. Demuestre que S también es de dimensión finita y $\dim(S) \le \dim(V)$.

40. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea S un subespacio de V tal que $\dim(S) = V$. Demuestre que $S = V$.

41. Sea V un espacio vectorial y sean S_1, S_2 sus subespacios tales que $S_1 \subset S_2$ y S_1, S_2 son de la misma dimensión finita: $\dim(S_1) = \dim(S_2) < +\infty$. Demuestre que $S_1 = S_2$.

42. En el espacio de los polinomios de grado ≤ 2 consideremos al siguiente subespacio:

$$S = \left\{ f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon \quad \int\limits_{-1}^{3} f(x)\,dx = 0 \right\}.$$

Construya una base de S y amplíela a una base del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

43. En el espacio de los polinomios de grado ≤ 2 consideremos dos subespacios:

$$S_1 = \big\{ f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon \quad f(3) = 0 \big\}, \qquad S_2 = \big\{ f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon \quad f(4) = 0 \big\}.$$

Halle $S_1 \cap S_2$, construya una base $\mathcal{A}$ de $S_1 \cap S_2$, amplíe $\mathcal{A}$ a una base $\mathcal{B}$ de S_1, amplíe $\mathcal{A}$ a una base $\mathcal{C}$ de S_2.

Dimensión de la suma de subespacios, fórmula de Grassmann

44. Dimensiones de los sumandos en la suma directa. Sea V un espacio vectorial y sean S_1, S_2 sus subespacios tales que V es la suma directa de S_1 y S_2. Sean $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_m$ y $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ bases de S_1 y S_2 respectivamente. Demuestre que $(a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n)$ es una base de V y concluya de allí (sin usar la fórmula de Grassmann) que

$$\dim(V) = \dim(S_1) + \dim(S_2).$$

45. Fórmula de Grassmann. Sean S_1 y S_2 subespacios de un espacio vectorial V. Demuestre que

$$\dim(S_1 + S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(S_1 \cap S_2).$$

46. Dimensiones de los sumandos en la suma directa (corolario de la fórmula de Grassmann). Sea V un espacio vectorial y sean S_1, S_2 sus subespacios tales que V es la suma directa de S_1 y S_2. Usando la fórmula de Grassmann demuestre que

$$\dim(V) = \dim(S_1) + \dim(S_2).$$

47. Sumas directas de varios subespacios (tarea adicional). Sea V una suma directa de sus subespacios $S_1, \ldots, S_m$. Esto significa que todo vector de v se escribe de manera única en forma $w_1 + \ldots + w_m$ con $w_i \in S_i$, $i \in \{1, \ldots, m\}$. Demuestre que

$$\dim(V) = \dim(S_1) + \ldots + \dim(S_m).$$

48. En el espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ consideremos los subespacios de las matrices triangulares superiores y triangulares inferiores: $S_1 = \mathfrak{ut}_2(\mathbb{R})$, $S_2 = \mathfrak{lt}_2(\mathbb{R})$. Halle $S_1 \cap S_2$ y $S_1 + S_2$, encuentre una base $\mathcal{A}$ de $S_1 \cap S_2$, amplíe $\mathcal{A}$ a una base $\mathcal{B}$ de S_1, amplíe $\mathcal{A}$ a una base $\mathcal{C}$ de S_2, calcule las dimensiones de S_1, S_2, $S_1 \cap S_2$ y $S_1 + S_2$, haga la comprobación con la fórmula de Grassmann.

49. En el espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ consideremos dos subespacios (matrices antisimétricas y matrices con traza nula):

$$S_1 = \big\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}):\ \ A^\top = -A\big\}, \qquad S_2 = \big\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}):\ \ \operatorname{tr}(A) = 0\big\}.$$

Halle $S_1 \cap S_2$ y $S_1 + S_2$, calcule las dimensiones de $S_1, S_2, S_1 \cap S_2, S_1 + S_2$ y haga la comprobación con la fórmula de Grassmann.

Rango de una lista de vectores, sublista básica

50. Escriba la definición del rango de una lista de vectores (o de un conjunto finito de vectores).

51. Criterio de sublista básica de una lista de vectores. Sea V un espacio vectorial, sean $a_1, \ldots, a_m \in V$ y sean $i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, m\}$ tales que $i_1 < \ldots < i_n$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}$ es una base de $\ell(a_1, \ldots, a_m)$.

(b) $a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}$ son linealmente independientes y $a_1, \ldots, a_m \in \ell(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})$.

52. Existencia de una sublista básica de una lista de vectores. Sea V un espacio vectorial y sean $a_1, \ldots, a_m \in V$. Demuestre que existen $i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, m\}$ tales que $i_1 < \ldots < i_n$ y $a_1, \ldots, a_m \in \ell(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})$.

Rango de una matriz

53. Renglones no nulos de una matriz pseudoescalonada. Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ una matriz pseudoescalonada y sean $i_1, \ldots, i_r$ los índices de sus renglones no nulos. Demuestre que estos renglones $A_{i_1,*}, \ldots, A_{i_r,*}$ son linealmente independientes.

54. Subsistema básico del sistema de columnas de una matriz pseudoescalonada. Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ una matriz pseudoescalonada. Denotemos por $i_1, \ldots, i_r$ ($i_1 < \ldots < i_r$) a los índices de sus renglones no nulos. En cada renglón no nulo elegimos una entrada con índices (i_k, j_k) tal que $A_{s,j_k} = 0$ para todo $s > i_k$. Demuestre que las columnas de A con índices $j_1, \ldots, j_r$ son linealmente independientes y generan a todas las columnas de la matriz A.

55. Renglones y columnas del producto de matrices como combinaciones lineales de los factores. Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ y sea $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{F})$. Escriba los renglones de AB como combinaciones lineales de los renglones de B. Escriba las columnas de AB como combinaciones lineales de las columnas de A.

56. Operaciones elementales con renglones no cambian el subespacio generado por renglones. Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ tales que $B = EA$, donde E es una matriz elemental. Demuestre que

$$\ell\big(A_{1,*}, \ldots, A_{m,*}\big) = \ell\big(B_{1,*}, \ldots, B_{m,*}\big).$$

57. Operaciones elementales con renglones no cambian dependencias lineales entre columnas. Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ tales que $B = EA$, donde E es una matriz elemental. Supongamos que

$$\lambda_1 A_{*,1} + \ldots + \lambda_n A_{*,n} = \mathbf{0}_m.$$

Demuestre que

$$\lambda_1 B_{*,1} + \ldots + \lambda_n B_{*,n} = \mathbf{0}_m.$$

58. Rango de renglones es igual con el rango de columnas. Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$. Demuestre que

$$\mathrm{r}(A_{1,*}, \ldots, A_{m,*}) = \mathrm{r}(A_{*,1}, \ldots, A_{*,n}).$$

59. Escriba la definición del rango de una matriz.

60. Criterio de la invertibilidad de una matriz cuadrada en términos de su rango. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Demuestre que A es invertible si y sólo si $\mathrm{r}(A) = n$.

61. Rango del producto de matrices. Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ y sea $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{F})$. Demuestre que

$$\mathrm{r}(AB) \le \min\big(\mathrm{r}(A), \mathrm{r}(B)\big),$$

esto es,

$$\mathrm{r}(AB) \le \mathrm{r}(A) \qquad \wedge \qquad \mathrm{r}(AB) \le \mathrm{r}(B).$$

62. Rango del producto de una matriz arbitraria por una matriz invertible. Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ y sea $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz invertible. Demuestre que

$$\mathrm{r}(AB) = \mathrm{r}(A).$$

63. Rango del producto de una matriz invertible por una matriz arbitraria. Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ y sea $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ una matriz invertible. Demuestre que

$$\mathrm{r}(BA) = \mathrm{r}(A).$$

64. Rango del producto, ejemplo con una desigualdad estricta. Encuentre dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tales que

$$\mathrm{r}(AB) < \min\bigl\{\mathrm{r}(A), \mathrm{r}(B)\bigr\}.$$

65. Las matrices no cuadradas no pueden ser invertibles. Sean $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$, $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{F})$, donde $m > n$. Demuestre que $AB \neq I_m$.

66. Dimensión del conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas. Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ y sea S el conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales homogéneas $Ax = \mathbf{0}_m$. Demuestre que

$$\dim(S) = n - \mathrm{r}(A).$$

67. Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ y sea $b \in \mathbb{F}^m$. Demuestre que el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ es consistente si y sólo si b pertenece al espacio vectorial generado por las columnas de A:

$$\Bigl(\exists x \in \mathbb{F}^n \quad Ax = b\Bigr) \qquad \Longleftrightarrow \qquad b \in \ell\bigl(A_{*,1}, \ldots, A_{*,n}\bigr).$$

68. Teorema de Kronecker–Capelli. Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ y sea $b \in \mathbb{F}^m$. Denotemos por C a la matriz aumentada que consiste en las columnas $A_{*,1}, \ldots, A_{*,n}, b$:

$$C = \bigl[A_{*,1}, \ldots, A_{*,n}, b\bigr].$$

Demuestre que el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ es consistente si y sólo si coinciden los rangos de las matrices A y C:

$$\Bigl(\exists x \in \mathbb{F}^n \quad Ax = b\Bigr) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{r}(C) = \mathrm{r}(A).$$

69. Número de las matrices $m \times n$ de rango m sobre un campo finito (tarea adicional). Sea $\mathbb{F}$ un campo de s elementos (por ejemplo, $\mathbb{F} = \{0, 1\}$, en este caso $s = 2$). Calcule el número de las matrices $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ tales que $\mathrm{r}(A) = m$.

70. Número de las matrices invertibles sobre un campo finito (tarea adicional). Sea $\mathbb{F}$ un campo de s elementos (por ejemplo, $\mathbb{F} = \{0, 1\}$, en este caso $s = 2$). Calcule el número de las matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ que son invertibles.