Formas bilineales y cuadráticas

Problemas principales para examen

Aquí están escritos los problemas de nivel intermedio que pueden aparecer en el examen. Para resolver estos problemas se recomienda primero resolver varios problemas más simples escritos en la lista completa de problemas teóricos.

En los problemas de este tema se supone que V es un espacio vectorial real de dimensión finita n.

1. Teorema de la representación matricial de una forma bilineal. Sea $\mathcal{B}$ una base de V, sean $f \in \mathcal{BL}(V)$, $u, v \in V$. Escriba la definición de la matriz asociada $f_{\mathcal{B}}$ y demuestre que

$$f(u, v) = u_{\mathcal{B}}^{\top} f_{\mathcal{B}} v_{\mathcal{B}}.$$

2. Unicidad de la representación matricial de una forma bilineal. Sea $\mathcal{B}$ una base de V y sea $f \in \mathcal{BL}(V)$. Supongamos que $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ tal que para cualesquiera $u, v \in V$

$$f(u, v) = u_{\mathcal{B}}^{\top} C v_{\mathcal{B}}.$$

Demuestre que $f_{\mathcal{B}} = C$.

3. Cambio de la matriz asociada a una forma bilineal al cambiar la base del espacio. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de V y sea $f \in \mathcal{BL}(V)$. Demuestre que

$$f_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}^{\top} f_{\mathcal{A}} P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}.$$

4. Descomposición del espacio de las formas bilineales en una suma directa de dos subespacios: formas simétricas y formas antisimétricas. Demuestre que el espacio vectorial $\mathcal{BL}(V)$ de las formas bilineales sobre V es la suma directa de sus subespacios $\mathcal{BL}_s(V)$ y $\mathcal{BL}_{as}(V)$ que constan de todas las formas bilineales simétricas y antisimétricas, respectivamente.

5. Criterio para la forma bilineal simétrica en términos de su matriz asociada. Sean V un espacio de dimensión finita, $\mathcal{B}$ una base de V y $f \in \mathcal{BL}(V)$. Demuestre que f es simétrica si y sólo si su matriz asociada respecto a $\mathcal{B}$ es simétrica:

$$f \in \mathcal{BL}_s(V) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (f_{\mathcal{B}})^{\top} = f_{\mathcal{B}}.$$

6. Una forma bilineal no simétrica también puede inducir una forma cuadrática. Demuestre que la función $q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la regla de correspondencia

$$q(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

es una forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$, esto es, encuentre una forma bilineal *simétrica* f tal que $q(x) = f(x, x)$.

7. Mostrar que la función dada no es forma cuadrática. Demuestre que la función $q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente regla no es una forma cuadrática:

$$q(x) = 3x_1x_2 + x_2^3.$$

8. Teorema sobre la unicidad de la representación matricial de una forma cuadrática. Sea $\mathcal{B}$ una base en V y sea $q \in \mathcal{Q}(V)$. Supongamos que $C \in \mathcal{SM}_n(\mathbb{F})$ tal que para cualquier $v \in V$ se cumple la igualdad

$$q(v) = v_{\mathcal{B}}^\top C v_{\mathcal{B}}.$$

Demuestre que $q_{\mathcal{B}} = C$.

9. El "núcleo" de una forma cuadrática. Muestre que si $q \in \mathcal{Q}(V)$, entonces el conjunto

$$N_q \coloneqq \big\{v \in V\colon\ q(v) = 0\big\}$$

es cerrado bajo la multiplicación por escalares. Encuentre una forma cuadrática $q \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^2)$ tal que N_q no sea cerrado bajo la adición de vectores. Para encontrar el ejemplo, puede calcular N_q para cada una de las siguientes formas cuadráticas:

$$q(x) = 0, \qquad q(x) = x_1^2 + x_2^2, \qquad q(x) = x_1^2 - x_2^2, \qquad q(x) = x_1^2.$$

10. Relación de congruencia es una relación de equivalencia. Enuncie la definición de la relación de congruencia en $\mathcal{SM}_n(\mathbb{R})$ y demuestre que esta relación binaria es reflexiva, simétrica y transitiva.

11. Clases de congruencia de matrices simétricas. Calcule el número de las clases de congruencia en $\mathcal{SM}_2(\mathbb{R})$. Indicación: aplicando teoremas apropiados demuestre que ningunas dos de las siguientes matrices $D_1, \ldots, D_6$ son congruentes, y cualquier matriz $A \in \mathcal{SM}_2(\mathbb{R})$ es congruente a una de las matrices $D_1, \ldots, D_6$:

$$\begin{aligned} &D_1 = \operatorname{diag}(1,1), && D_2 = \operatorname{diag}(1,-1), && D_3 = \operatorname{diag}(1,0), \\ &D_4 = \operatorname{diag}(-1,-1), && D_5 = \operatorname{diag}(-1,0), && D_6 = \operatorname{diag}(0,0). \end{aligned}$$