

# Operadores lineales positivos

**Objetivos.** Conocer definiciones equivalentes de operadores lineales positivos.

**Requisitos.** Transformación autoadjunta.

**1. Definición (operador lineal positivo).** Sea  $V$  un espacio vectorial complejo o real con producto interno. Un operador lineal  $T \in \mathcal{L}(V)$  se llama *positivo* si  $T^* = T$  y

$$\langle Tv, v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in V.$$

**2. Proposición (criterio de operador lineal positivo).** Sea  $T \in \mathcal{L}(V)$ . Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a)  $T$  es positivo.
- (b)  $T$  es autoadjunto y  $\text{sp}(T) \subset [0, +\infty)$ .
- (c) Existe un operador lineal  $S \in \mathcal{L}(V)$  tal que  $T = S^*S$ .

**3. Corolario (criterio de matriz lineal positiva).** Sea  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a)  $A$  es positiva.
- (b)  $A$  es autoadjunta y  $\text{sp}(A) \subset [0, +\infty)$ .
- (c) Existe una matriz  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  tal que  $A = B^*B$ .

**4. Proposición (diagonalización unitaria de una matriz positiva).**

Sea  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a)  $A$  es positiva.
- (b) existe una matriz unitaria  $U$  y una matriz diagonal  $D$  con entradas no negativas tales que

$$A = U^{-1}DU.$$