Polinomio de una matriz cuadrada

Objetivos. Definir el valor de un polinomio en una matriz cuadrada.

Requisitos. Polinomios de una variable, operaciones con matrices, matriz identidad, potencias no negativas de una matriz cuadrada.

1. Ejemplo. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $P(x) = 3x^2 + 5x - 7$, entonces $P(A)$ se define como $3A^2 + 5A - 7I_n$.

2. Definición (polinomio de una matriz cuadrada). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ una matriz cuadrada y sea P un polinomio con coeficientes pertenecientes a $\mathbb{F}$:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{d} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_d x^d \qquad (c_0, \ldots, c_d \in \mathbb{F}).$$

Entonces $P(A)$ es la matriz definida mediante la siguiente fórmula:

$$P(A) = \sum_{k=0}^{d} c_k A^k = c_0 I + c_1 A + c_2 A^2 + \ldots + c_d A^d.$$

3. ¿Para qué sirven los polinomios de matrices?. Polinomios de matrices hacen un gran papel en la teoría espectral de operadores lineales que se estudia en el curso de Álgebra III. En particular, polinomios de matrices se pueden usar para calcular la función exponencial $\exp(A)$ de una matriz cuadrada A, la cual se usa en la teoría de ecuaciones diferenciales.

4. Ejemplo. Sean $P(x) = x^2 - 7x + 10$,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calculemos la matriz $P(A)$ de tres maneras diferentes:

$$A^2 - 7A + 10I, \qquad (A - 7I)A + 10I, \qquad (A - 2I)(A - 5I).$$

Solución. 1. $P(A) = A^2 - 7A + 10I$.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9-7 & -3+0 \\ 21+0 & -7+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 21 & -7 \end{bmatrix}.$$

De allí

$$P(A) = A^2 - 7A + 10I = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 21 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -21 & 7 \\ -49 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 4 \\ -28 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. $P(A) = (A - 7I)A + 10I$.

$$(A - 7I)A = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 7 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 - 7 & 4 + 0 \\ 21 - 49 & -7 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 & 4 \\ -28 & -7 \end{bmatrix}.$$

De allí

$$P(A) = (A - 7I)A + 10I = \begin{bmatrix} -19 & 4 \\ -28 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 4 \\ -28 & 3 \end{bmatrix}.$$

3. $P(A) = (A - 2I)(A - 5I)$.

$$(A - 2I)(A - 5I) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 7 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 - 7 & -1 + 5 \\ -14 - 14 & -7 + 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 4 \\ -28 & 3 \end{bmatrix}.$$

Respuesta:

$$P(A) = \begin{bmatrix} -9 & 4 \\ -28 & 3 \end{bmatrix}.$$

$\square$

5. Tarea adicional (propiedades de polinomios de matrices). Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$, $P, Q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$, $\lambda \in \mathbb{F}$. Demostrar que

$$(P + Q)(A) = P(A) + Q(A), \qquad (\lambda P)(A) = \lambda P(A), \qquad (PQ)(A) = P(A)Q(A).$$

6. Ejercicio. Sean $P(x) = x^2 - 8x + 12$,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 1 & 4 & -8 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz $P(A)$ de tres maneras diferentes:

$$A^2 - 8A + 12I, \qquad (A - 8I)A + 12I, \qquad (A - 2I)(A - 6I).$$