Matrices polinomiales

Objetivos. Conocer *matrices polinomiales* y *polinomios con coeficientes matriciales*, observar que estos dos conceptos se pueden identificar. Encontrar una condición suficiente para la igualdad $(PQ)(A) = P(A)Q(A)$, donde P y Q son dos polinomios con coeficientes matriciales.

Requisitos. Polinomio de un operador lineal, polinomio de una matriz, definición formal del producto de polinomios.

1. Polinomios con coeficientes matriciales. Sean $P_0, \ldots, P_m \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Entonces la expresión

$$P(\lambda) := P_0 + P_1\lambda + P_2\lambda^2 + \ldots + P_m\lambda^m$$

se llama *polinomio con coeficientes matriciales.*

2. Evaluación de un polinomio con coeficientes matriciales en una matriz. Sea P un polinomio con coeficientes matriciales en $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$:

$$P(\lambda) = P_0 + P_1\lambda + P_2\lambda^2 + \ldots + P_m\lambda^m,$$

y sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ una matriz. Entonces se definen el *valor derecho* y el *valor izquierdo* del polinomio P en la matriz A:

$$\begin{aligned} P^{der}(A) &= P_0 + P_1A + P_2A^2 + \ldots + P_mA^m, \\ P^{izq}(A) &= P_0 + AP_1 + A^2P_2 + \ldots + A^mP_m. \end{aligned}$$

En vez de $P^{der}(A)$ escribimos simplemente $P(A)$.

3. Ejemplo cuando $(PQ)(A) \neq P(A)Q(A)$. Polinomios con coeficientes matriciales no cumplen algunas de las propiedades de los polinomios con coeficientes numéricos. Mostremos un ejemplo de polinomios P, Q con coeficientes matriciales tales que

$$(PQ)(A) \neq P(A)Q(A).$$

Sean

$$P(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\lambda, \qquad Q(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$(PQ)(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda, \qquad (PQ)(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad P(A)Q(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Condición suficiente para la igualdad $\boldsymbol{(PQ)(A) = P(A)Q(A)}$. Sean P y Q polinomios con coeficientes matriciales:

$$P(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} P_i \lambda^i, \qquad Q(\lambda) = \sum_{j=0}^{s} Q_j \lambda^j,$$

donde $P_i, Q_j \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$, y sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ una matriz que conmuta con todos los coeficientes del polinomio Q:

$$Q_j A = A Q_j \qquad \forall j \in \{0, \ldots, s\}.$$

Entonces

$$(PQ)(A) = P(A)Q(A).$$

Demostración. Recordamos la definición del producto de polinomios:

$$(PQ)(\lambda) = \sum_{k=0}^{m+s} \left(\sum_{\substack{i,j:\\ i+j=k}} P_i Q_j \right) \lambda^k.$$

De allí

$$(PQ)(A) = \sum_{k=0}^{m+s} \left(\sum_{\substack{i,j:\\ i+j=k}} P_i Q_j \right) A^k.$$

Por otro lado,

$$P(A)Q(A) = \left(\sum_{i=0}^{m} P_i A^i \right) \left(\sum_{j=0}^{s} Q_j A^j \right) = \sum_{\substack{0 \le i \le m\\ 0 \le j \le n}} P_i A^i Q_j A^j.$$

Juntando los sumandos en grupos con $i + j = k$ podemos escribir el resultado de la siguiente manera:

$$P(A)Q(A) = \sum_{k=0}^{m+s} \left(\sum_{\substack{i,j:\\ i+j=k}} P_i A^i Q_j A^j \right).$$

Ahora usamos la condición que A conmuta con Q_j:

$$P_i A^i Q_j A^j = P_i Q_j A^{i+j}.$$

De allí obtenemos que

$$P(A)Q(A) = \sum_{k=0}^{m+s} \sum_{\substack{i,j:\\ i+j=k}} P_i Q_j A^k = (PQ)(A). \qquad \square$$