¿Cómo calcular el producto de dos permutaciones? ¿Cómo calcular el signo de una permutación?

Ejercicios

Objetivos. Aprender a multiplicar permutaciones y calcular su signo.

Requisitos. Permutaciones, composición de funciones, permutaciones cíclicas.

Producto de dos permutaciones

1. Ejemplo: el producto de dos permutaciones. Consideremos dos permutaciones del conjunto $\{1, \ldots, 6\}$, es decir dos elementos de S_6:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Esta notación significa que

$$\varphi(1) = 3, \quad \varphi(2) = 1, \quad \varphi(3) = \underbrace{\qquad}_{?}, \quad \varphi(4) = \underbrace{\qquad}_{?}, \quad \varphi(5) = \underbrace{\qquad}_{?}, \quad \varphi(6) = \underbrace{\qquad}_{?}$$

y

$$\psi(1) = 6, \quad \psi(2) = 3, \quad \psi(3) = \underbrace{\qquad}_{?}, \quad \psi(4) = \underbrace{\qquad}_{?}, \quad \psi(5) = \underbrace{\qquad}_{?}, \quad \psi(6) = \underbrace{\qquad}_{?}.$$

El producto $\varphi\psi$ se define como la **composición** $\varphi \circ \psi$.
Esto significa que para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$(\varphi\psi)(j) := \underbrace{\qquad\qquad}_{?}.$$

Para calcular $(\varphi\psi)(j)$ con algún $j \in \{1, \ldots, n\}$ primero aplicamos al número j la permutación $\underbrace{\qquad}_{?}$, luego aplicamos al resultado la permutación $\underbrace{\qquad}_{?}$:

$$(\varphi\psi)(1) = \varphi(\psi(1)) = \varphi(6) = 5; \qquad (\varphi\psi)(2) = \varphi(\psi(2)) = \varphi(3) = 6;$$

$$(\varphi\psi)(3) = \varphi(\psi(\quad)) = \varphi(\quad) = \underbrace{\qquad}_{?}; \qquad (\varphi\psi)(4) = \varphi(\psi(\quad)) = \varphi(\quad) = \underbrace{\qquad}_{?};$$

$$(\varphi\psi)(5) = \varphi(\psi(\quad)) = \varphi(\quad) = \underbrace{\qquad}_{?}; \qquad (\varphi\psi)(6) = \varphi(\psi(\quad)) = \varphi(\quad) = \underbrace{\qquad}_{?}.$$

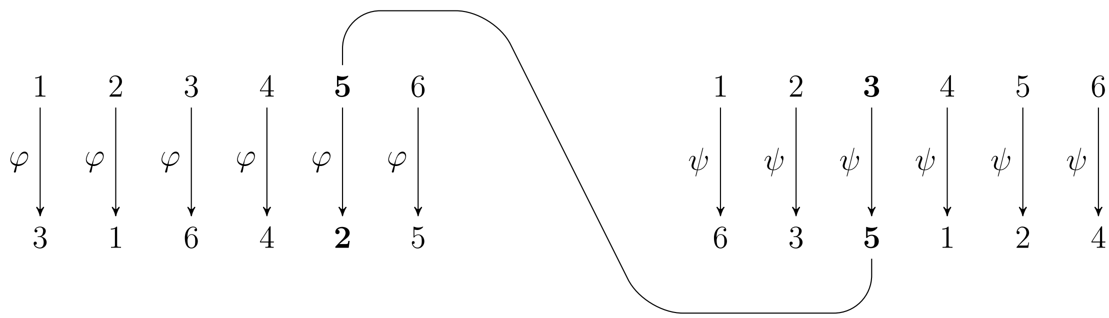
Respuesta:

$$\varphi\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & & & & & \end{pmatrix}.$$

2. El mismo ejemplo sin escribir cálculos intermedios. Seguimos trabajando con las permutaciones φ y ψ del ejemplo anterior:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Otra vez calculemos el mismo producto $\varphi\psi$, pero ahora sin escribir los cálculos intermedios. Por ejemplo, para calcular $(\varphi\psi)(3)$, uno puede pensar según el siguiente diagrama:



Procediendo de esta manera, otra vez calcule $\varphi\psi$:

$$\varphi\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ & & 2 & & & \end{pmatrix}.$$

3. Producto de las mismas permutaciones, pero en otro orden. Seguimos trabajando con las permutaciones φ y ψ del ejemplo anterior:

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calculemos el producto $\psi\varphi$. Por ejemplo,

$$(\psi\varphi)(6) = \psi(\varphi(6)) = \psi(5) = 2.$$

Calcule el producto $\psi\varphi$:

$$\psi\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ & & & & & 2 \end{pmatrix}.$$

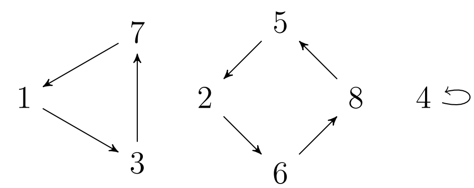
4. Conclusión acerca de la conmutatividad de la multiplicación de permutaciones. Compare los productos $\varphi\psi$ y $\psi\varphi$ de los Ejercicios 2 y 3: ¿son iguales o no?. ¿Qué conclusión se puede hacer de este ejemplo acerca de la conmutatividad de la multiplicación en S_6?.

- ○ La multiplicación en S_6 es conmutativa, es decir, siempre se cumple la igualdad $\varphi\psi = \psi\varphi$.
- ○ La multiplicación en S_6 no es conmutativa, es decir, no siempre se cumple la igualdad $\varphi\psi = \psi\varphi$.
- ○ Este ejemplo no es suficiente para hacer la conclusión.

Descomposición de una permutación en ciclos disjuntos

5. Ejemplo. Use el siguiente ejemplo para comprender el procedimiento:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 6 & 7 & 4 & 2 & 8 & 1 & 5 \end{pmatrix} =$$



Los mismos ciclos se pueden dibujar de manera "lineal":

$$\varphi = \quad 1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 7 \qquad 2 \longrightarrow 6 \longrightarrow 8 \longrightarrow 5 \qquad 4$$

De aquí proviene una notación más breve:

$$\varphi = \mathrm{c}(1,3,7)\,\mathrm{c}(2,6,8,5)\,\mathrm{c}(4).$$

6. Otro ejemplo.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 2 & 7 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Escriba la descomposición en ciclos disjuntos con flechitas:

$$\varphi = \quad 1 \longrightarrow \qquad \longrightarrow \qquad\quad 2 \qquad 3 \longrightarrow$$

Ahora en notación breve:

$$\varphi = \mathrm{c}(\quad,\quad,\quad)\ \mathrm{c}(\quad)\ \mathrm{c}(\quad,\quad)\ \mathrm{c}(\quad).$$

7. Otro ejemplo.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 9 & 2 & 7 & 3 & 1 & 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Escriba la descomposición de φ en ciclos disjuntos.

Cálculo del signo de una permutación

A cada permutación $\varphi\colon \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$ le corresponde un número 1 o -1 llamado el *signo* o la *signatura* de φ y denotado por $\operatorname{sgn}(\varphi)$. Se dice que φ es *par* si $\operatorname{sgn}(\varphi) = 1$; es *impar* si $\operatorname{sgn}(\varphi) = -1$.

Hay varias maneras de definir y calcular $\operatorname{sgn}(\varphi)$. La definición escrita abajo nos permite calcular $\operatorname{sgn}(\varphi)$ de manera la más eficiente (es decir, la más rápida). Luego vamos a analizar esta definición con más detalles.

8. Definición del signo de una permutación. Sea φ una permutación que se descompone en p ciclos de longitudes $r_1, r_2, \ldots, r_p$. Entonces el signo de φ se define como

$$\operatorname{sgn}(\varphi) \coloneqq (-1)^{(r_1-1)+(r_2-1)+\ldots+(r_p-1)}.$$

Consideremos la permutación del Ejemplo 5:

$$\varphi = \mathrm{c}(1,3,7)\,\mathrm{c}(2,6,8,5)\,\mathrm{c}(4)$$

Aquí tenemos 3 ciclos de longitudes $3, 4, 1$ (es decir, $p = 3$, $r_1 = 3$, $r_2 = 4$, $r_3 = 1$), así que

$$\operatorname{sgn}(\varphi) = (-1)^{(3-1)+(4-1)+(1-1)} = (-1)^{2+3+0} = (-1)^5 = -1.$$

En otras palabras, la permutación φ del Ejemplo 5 es *impar*.

9. Ejercicio. Calcule el signo de la permutación del Ejemplo 6 usando su descomposición en ciclos disjuntos:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 2 & 7 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} =$$

$\operatorname{sgn}(\varphi) =$

10. Ejercicio. Calcule el signo de la permutación del Ejemplo 7:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 9 & 2 & 7 & 3 & 1 & 4 & 5 & 8 \end{pmatrix} =$$

$\operatorname{sgn}(\varphi) =$