Permutaciones

(Ejercicios)

Objetivos. Conocer la definición de permutación y revisar algunos ejemplos. Calcular el número de las permutaciones del conjunto $\{1, \ldots, n\}$. Conocer los conceptos de *transposición* y *ciclo*; aprender sus definiciones formales.

Requisitos. Funciones inyectivas, suprayectivas y biyectivas.

1. Definición de función inyectiva en forma de desigualdades (repaso).
Una función $\varphi\colon X \to Y$ se llama *inyectiva*

si para cualesquiera $i, j \in X$ tales que $i \neq j$, se tiene que $\varphi(i) \underbrace{\qquad}_{?} \varphi(j)$.

En otras palabras, φ se llama inyectiva si manda elementos diferentes en

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}$.

2. Una ley lógica. La afirmación $\quad$(no P) implica (no Q)$\quad$ es equivalente a la afirmación

$$Q \quad \text{implica} \quad \underbrace{\qquad\quad}_{?}.$$

3. Definición de función inyectiva en forma de igualdades (repaso).
Una función $\varphi\colon X \to Y$ se llama *inyectiva* si para cualesquiera $i, j \in X$

tales que $\varphi(i) = \varphi(j)$, se tiene que $\underbrace{\qquad\qquad}_{?}$.

4. Definición de función suprayectiva (repaso).
Una función $\varphi\colon X \to Y$ se llama *suprayectiva* o *sobreyectiva*

si el conjunto de todos los valores de φ, llamado también $\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}$ de φ,

coincide con el contradominio de φ, es decir, con el conjunto $\underbrace{\qquad}_{?}$.

Definición (permutación). Sea X un conjunto. Una función $\varphi\colon X \to X$ se llama *permutación* del conjunto X si φ es biyectiva, es decir es inyectiva y suprayectiva.

Ejemplo. La siguiente función $\varphi\colon \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$ es una permutación del conjunto $\{1,2,3,4\}$:

$$\varphi(1) = 4, \qquad \varphi(2) = 2, \qquad \varphi(3) = 1, \qquad \varphi(4) = 3.$$

Se usan las siguientes notaciones:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \varphi = 4, 2, 1, 3.$$

La *inyectividad* de φ significa que los elementos de la fila $4, 2, 1, 3$ son $\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}$.

La propiedad *suprayectiva* de φ significa que en la fila $4, 2, 1, 3$ aparecen $\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}$ elementos del conjunto $\{1,2,3,4\}$.

5. Determine cuáles de las siguientes funciones son permutaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Se puede demostrar (pero no lo vamos a demostrar en este curso) que si X es un conjunto finito y $\varphi\colon X \to X$, entonces para la función φ las propiedades de ser *inyectiva* y de ser *suprayectiva* son equivalentes.

En otras palabras, si $\varphi(1), \varphi(2), \ldots, \varphi(n)$ son diferentes a pares,

entonces $\{\varphi(1), \varphi(2), \ldots, \varphi(n)\} = \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}$, y viceversa:

si $\varphi(1), \varphi(2), \ldots, \varphi(n)$ son $\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}$ los elementos del conjunto $\{1, \ldots, n\}$,

entonces necesariamente $\varphi(1), \varphi(2), \ldots, \varphi(n)$ son $\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}$.

Notación (conjunto de las permutaciones del conjunto $\{1,\ldots,n\}$). El conjunto de todas las permutaciones del conjunto $\{1,\ldots,n\}$ se denota por S_n.

7. Conjunto S_1. El conjunto S_1 consiste de un elemento: $\begin{pmatrix} 1 \\ \downarrow \\ \end{pmatrix}$.

8. Conjunto S_2. Es fácil ver que el conjunto S_2 consiste de dos permutaciones, es decir, existen exactamente dos biyecciones $\{1,2\} \to \{1,2\}$.

Una de estas es $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \downarrow & \downarrow \\ 1 & \end{pmatrix}$, y la otra es $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \downarrow & \downarrow \\ & \end{pmatrix}$.

9. Conjunto S_3. Escriba de manera explícita todos los elementos del conjunto S_3 (son 6 permutaciones).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & & \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$$

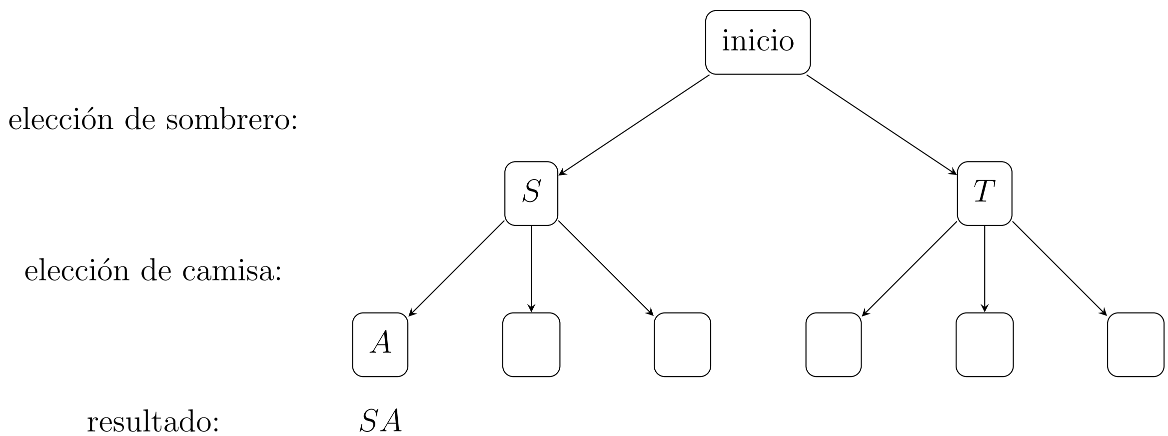
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$$

Principio del producto en la combinatoria

10. Ejemplo. Supongamos que una persona está escogiendo ropa para ir a una fiesta, y puede elegir uno de dos sombreros (los denotamos por S, T) y una de tres camisas (las denotamos A, B, C). Supongamos que cualquier camisa se combina bien con cualquier sombrero. Entonces las opciones posibles son

$$SA, \qquad SB, \qquad S\underbrace{\qquad}_{?}, \qquad \underbrace{\qquad\quad}_{?}, \qquad \underbrace{\qquad\quad}_{?}, \qquad \underbrace{\qquad\quad}_{?}.$$

11. Sombreros y camisas, árbol de posibilidades. El proceso de elección se puede representar como un árbol (hay que nombrar todos sus nodos):



Sombreros y camisas, número de variantes. Al elegir uno de dos sombreros, en todo caso tenemos que elegir una de tres camisas. En total son $2 \times 3 = 6$ variantes.

12. Numeración del conjunto S_3.
Es natural escribir los elementos de S_3 (es decir, las permutaciones del conjunto $\{1,2,3\}$) en el siguiente orden. Empezamos con las permutaciones $\varphi\colon \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$ tales que $\varphi(1) = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & & \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & & \end{pmatrix}.$$

Luego escribimos las dos permutaciones $\varphi\colon \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$ tales que $\varphi(1) = \underbrace{\qquad}_{?}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & & \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & & \end{pmatrix}.$$

Al final, las $\underbrace{\qquad\quad}_{?}$ permutaciones $\varphi\colon \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$ tales que $\varphi(1) = \underbrace{\qquad}_{?}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}.$$

De aquí está claro que el número de elementos de S_3 es

$$|S_3| \;=\; 3 \cdot \underbrace{\qquad}_{?} \;=\; \underbrace{\qquad}_{?}\;.$$

13. Razonamiento con la elección de valores de φ.
Si φ es una permutación arbitraria del conjunto $\{1,2,3\}$,
entonces ¿cuáles son los valores posibles de $\varphi(1)$? Respuesta: $\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}$.

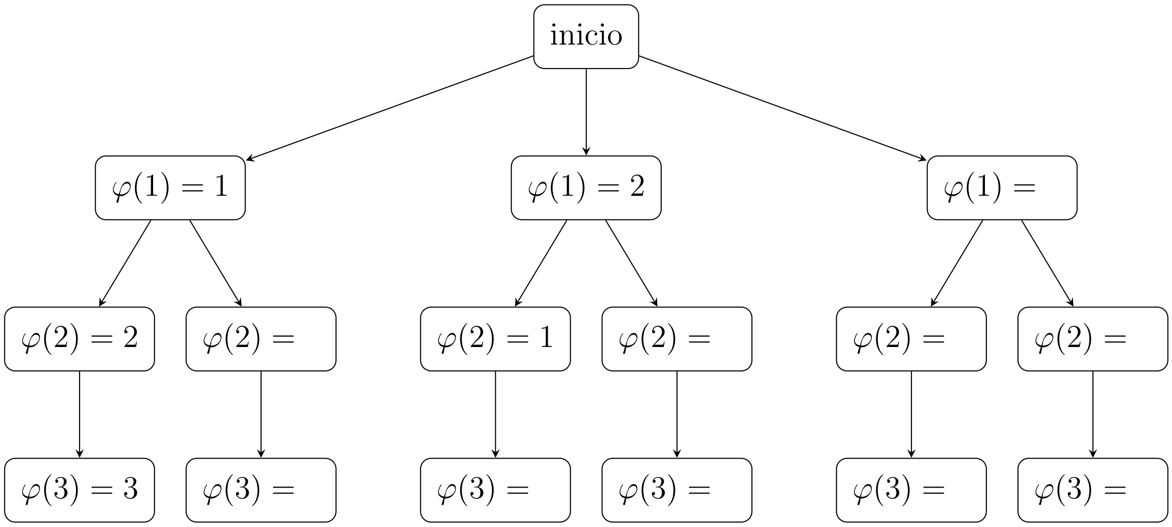
Ahora supongamos que φ es una permutación del conjunto $\{1,2,3\}$ tal que $\varphi(1) = 3$.
Entonces $\varphi(2)$ ya no puede ser 3 porque la función φ es $\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}$.

Por eso los valores posibles de $\varphi(2)$ son $\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}$.

Ahora supongamos que $\varphi \in S_3$ tal que $\varphi(1) = 3$ y $\varphi(2) = 1$.
Entonces $\varphi(3)$ ya no puede ser 3 ni 1 porque la función φ es $\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}$.

Por eso el único valor posible de $\varphi(3)$ es $\underbrace{\qquad}_{?}$.

14. Elección de valores de φ como un árbol de posibilidades.



$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & & \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & \end{matrix}$$

15. Sobre el número de elementos de S_3.

El valor $\varphi(1)$ puede ser cualquier elemento del conjunto $\{\underbrace{\qquad\qquad}_{?}\}$.

Al elegir algún valor $\varphi(1)$, ya no podemos usarlo como $\varphi(2)$, porque la función φ es $\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}$.

Por lo tanto, si $\varphi(1)$ ya está elegido, entonces para $\varphi(2)$ tenemos $\underbrace{\qquad\quad}_{?}$ opciones.

Luego, al elegir $\varphi(1)$ y $\varphi(2)$, ¿cuántas opciones tenemos para $\varphi(3)$? Respuesta: $\underbrace{\qquad}_{?}$.

De aquí está claro que el número de elementos de S_3 es

$$|S_3| = \underbrace{\qquad}_{?} \cdot \underbrace{\qquad}_{?} \cdot 1 = \underbrace{\qquad}_{?}.$$

16. Conjunto S_4.
Vamos a escribir algunos de los elementos del conjunto S_4 y calcular el número de sus elementos. Primero escribimos todas las permutaciones $\varphi \in S_4$ tales que $\varphi(1) = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & & \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & & \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & & & \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & & & \end{pmatrix}.$$

Ahora escribimos todas las permutaciones $\varphi \in S_4$ tales que $\varphi(1) = 2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & & & \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & & & \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & & & \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & & & \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & & & \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & & & \end{pmatrix}.$$

Falta escribir $\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{¿cuántas?}}$ permutaciones $\varphi \in S_4$ tales que $\varphi(1) = \underbrace{\quad}_{?}$

y $\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{¿cuántas?}}$ permutaciones $\varphi \in S_4$ tales que $\varphi(1) = \underbrace{\quad}_{?}$.

De aquí se sigue que $|S_4| = 4 \cdot \underbrace{\quad}_{?} = \underbrace{\quad}_{?}$.

Notemos que el segundo factor es el número de elementos del conjunto S_3:

$$|S_4| = \underbrace{\quad}_{?} \cdot |S_3|.$$

17. Fórmula general para el número de elementos de S_n.
En general, se puede demostrar que $|S_n| = \underbrace{\quad}_{?} \cdot |S_{n-1}|$.

De esta fórmula recursiva y de la condición inicial $|S_1| = 1$ se sigue que el número de todas las permutaciones del conjunto $\{1, \ldots, n\}$ es el factorial del número n:

$$\boxed{|S_n| = n!}$$

Transposiciones

Definición informal. Transposiciones del conjunto $\{1,\ldots,n\}$ son aquellas permutaciones de este conjunto que intercambian exactamente dos elementos y dejan los demás elementos inmovibles.

18. Ejemplo. La *transposición* de los elementos 1 y 5 es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \mathbf{5} & 2 & 3 & 4 & \mathbf{1} & 6 \end{pmatrix}$$

La vamos a denotar por $\tau_{1,5}$. Sería más preciso indicar también el tamaño del conjunto (en este ejemplo $n=6$), pero este tamaño casi siempre está claro del contexto y por eso no se indica. Notemos que en este ejemplo

$$\varphi(1) = \underbrace{\qquad}_{?}, \qquad \varphi(5) = \underbrace{\qquad}_{?},$$

y para todo $k \in \{2,3,4,6\}$ tenemos que $\varphi(k) = \underbrace{\qquad}_{?}$.

Lo mismo se escribe de la siguiente manera:

$$\varphi(k) = \begin{cases} \qquad, & \text{si } k = 1; \\ \qquad, & \text{si } k = 5; \\ \qquad, & \text{si } k \in \{2,3,4,6\}. \end{cases}$$

19. Escriba de manera explícita las siguientes transposiciones (suponiendo $n=5$):

$$\tau_{2,5} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & & & & \end{pmatrix}, \qquad \tau_{2,3} =$$

20. Escriba las siguientes transposiciones usando la notación $\tau_{?,?}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \underbrace{\qquad}_{?}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix} = \underbrace{\qquad}_{?}.$$

Definición formal de la transposición de i y j

21. Consideremos la transposición $\tau_{3,6}$ que actúa en el conjunto $\{1, \ldots, 7\}$:

$$\tau_{3,6} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ & & & & & & \end{pmatrix}.$$

Escriba su regla de correspondencia usando la siguiente notación:

$$\tau_{3,6}(k) = \begin{cases} \qquad, & \text{si } k = 3; \\ \qquad, & \text{si } k = 6; \\ \qquad, & \text{si } k \in \{1, \ldots, 7\} \setminus \{\quad,\quad\}. \end{cases}$$

22. Definición (transposición de elementos i y j). Sean $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$. La *transposición* de i y j denotada por $\tau_{i,j}$ es la permutación que intercambia i y j y no mueve los demás elementos:

$$\tau_{i,j}(k) := \begin{cases} \qquad, & \text{si } k = \qquad; \\ \qquad, & \text{si } k = \qquad; \\ \qquad, & \text{si } k \in \end{cases}$$

23. Escriba las transposiciones $\tau_{1,3}$ y $\tau_{3,1}$ (con $n = 5$):

$$\tau_{1,3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & & & & \end{pmatrix}, \qquad \tau_{3,1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & & & & \end{pmatrix}.$$

Resumen: las transposiciones $\tau_{i,j}$ y $\tau_{j,i}$ son $\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}$.

Número de transposiciones del conjunto $\{1,\ldots,n\}$

24. Escriba de manera explícita todas las transposiciones del conjunto $\{1,2,3\}$:

$$\tau_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}, \qquad \tau_{1,3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}, \qquad \tau_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}.$$

Notemos que $\tau_{2,1} = \tau_{1,2}$ y escribimos esta transposición sólo una vez.

25. Escriba todas las transposiciones del conjunto $\{1,2,3,4\}$ usando la notación $\tau_{i,j}$:

$$\tau_{1,2}, \quad \tau_{1,3},$$

26. Número de transposiciones del conjunto $\{1,\ldots,n\}$, primera solución. Elegir una transposición $\tau_{i,j}$ del conjunto $\{1,\ldots,n\}$ significa elegir un subconjunto $\{i,j\}$ de dos elementos en el conjunto $\{1,\ldots,n\}$ que consiste de n elementos. El número de estos subconjuntos se calcula por medio de un *coeficiente binominal*:

$$\binom{\ }{\ } =$$

27. Número de transposiciones del conjunto $\{1,\ldots,n\}$, segunda solución.

Calculemos el número de pares ordenados (i,j) con $i \in \{1,\ldots,n-1\}$, $j \in \{i+1,\ldots,n\}$.

Hay $\underbrace{\qquad}_{?}$ pares ordenados de la forma $(1,j)$ con $1 < j \le n$;

hay $\underbrace{\qquad}_{?}$ pares ordenados de la forma $(2,j)$ con $2 < j \le n$;

$\ldots,$

hay $\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}$ de la forma $(n-1,j)$ con $n-1 < j \le n$.

El número total de los pares ordenados (i,j) con $1 \le i < j \le n$
es la suma de una progresión $\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{¿aritmética o geométrica?}}$:

$$\underbrace{\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad}_{?} + \cdots + \underbrace{\qquad}_{?} =$$

Ciclos (permutaciones cíclicas)

Ejemplo. Denotemos por $\mathrm{c}_7(2,5,1,6,4)$ la permutación del conjunto $\{1,\ldots,6\}$ que manda 2 a 5, 5 a 1, 1 a 6, 6 a 4, 4 a 2, y deja fijos los elementos 3 y 7:

$$
\mathrm{c}_7(2,5,1,6,4) \;=\;
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & 2 \arrow[drr] & & & & & \\
4 \arrow[urr] & & & & 5 \arrow[dl] & 3 \arrow[loop above] & & 7 \arrow[loop above] \\
 & 6 \arrow[ul] & & 1 \arrow[ll] & & & &
\end{tikzcd}
\;=\;
\begin{pmatrix}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
6 & 5 & 3 & 2 & 1 & 4 & 7
\end{pmatrix}.
$$

Por lo común el tamaño n (en este ejemplo 7) está claro del contexto y se omite, es decir, en vez de $\mathrm{c}_7(2,5,1,6,4)$ se escribe simplemente $\mathrm{c}(2,5,1,6,4)$. Los profesionales que trabajan mucho con permutaciones usan una notación más breve: (2 5 1 6 4).

28. Escriba en forma explícita las siguientes *permutaciones cíclicas* (*ciclos*):

$$
\mathrm{c}_5(2,3,4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & & & \end{pmatrix}
$$

$$
\mathrm{c}_6(6,1,3,5,2,4) =
$$

$$
\mathrm{c}_5(4,3,1,5) =
$$

29. Las siguientes permutaciones son ciclos. Escríbalas usando la notación cíclica:

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 6 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \mathrm{c}_6(\quad,\quad,\quad,\quad).
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 3 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \mathrm{c}_6(\quad,\quad,\quad).
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} =
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} =
$$

30. Transposiciones son ciclos de dos elementos. Si $n = 6$, entonces

$$
\tau_{1,3} = \mathrm{c}_6(1,3), \qquad \tau_{2,5} = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}, \qquad \mathrm{c}_6(1,4) = \underbrace{\qquad\quad}_{\tau_{?,?}}, \qquad \mathrm{c}_6(5,6) = \underbrace{\qquad\quad}_{\tau_{?,?}}.
$$

Definición formal del ciclo de los elementos $a_1, \ldots, a_r$

31. Consideremos la permutación cíclica $\mathrm{c}_7(3,1,4)$:

$$\varphi = \mathrm{c}_7(3,1,4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & & & & & & \end{pmatrix}.$$

Notemos que

$$\varphi(3) = \underbrace{\qquad}_{?}, \qquad \varphi(1) = \underbrace{\qquad}_{?}, \qquad \varphi(4) = \underbrace{\qquad}_{?},$$

y para todo $k \in \{2,5,6,7\}$ se cumple la fórmula $\varphi(k) = \underbrace{\qquad}_{?}$.

La regla de correspondencia de esta permutación se puede escribir de la siguiente manera:

$$\varphi(k) = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 3; \\ \quad, & \text{si } k = 1; \\ \quad, & \text{si } k = 4; \\ \quad, & \text{si } k \in \{ \qquad\qquad \}. \end{cases}$$

32. Consideremos la permutación cíclica $\varphi = \mathrm{c}_n(a_1, a_2, a_3, a_4)$, donde a_1, a_2, a_3, a_4 son cuatro elementos diferentes del conjunto $\{1, \ldots, n\}$. La regla de correspondencia es

$$\varphi(k) = \begin{cases} \quad, & \text{si } k = a_1; \\ \quad, & \text{si } k = \quad; \\ \quad, & \text{si } k = \quad; \\ \quad, & \text{si } k = \quad; \\ \quad, & \text{si } k \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{ \quad, \quad, \quad, \quad \}. \end{cases}$$

33. Definición (permutación cíclica de $a_1, \ldots, a_r$). Sean $a_1, \ldots, a_r$ algunos elementos diferentes del conjunto $\{1, \ldots, n\}$. Entonces el ciclo $\varphi = \mathrm{c}_n(a_1, \ldots, a_r)$ se define mediante la siguiente regla de correspondencia:

$$\varphi(k) := \begin{cases} \quad, & \text{si } k = a_j,\ j \in \{1, \ldots, r-1\}; \\ \quad, & \text{si } k = a_r; \\ \quad, & \text{si } k \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{ \quad, \ldots, \quad \}. \end{cases}$$