Matrices de permutación

Egor Maximenko
con correcciones de Román Higuera García y Juan Carlos Jiménez Cervantes

Instituto Politécnico Nacional, ESFM, México

2 de octubre de 2026

Contenido

Objetivos y requisitos

Repaso rápido

- Permutaciones
- Multiplicación de matrices
- Delta de Kronecker

Matrices de permutación

- Mul. de matrices de permutación por vectores
- Multiplicación de matrices de permutación

Contenido

Objetivos y requisitos

Repaso rápido

- Permutaciones
- Multiplicación de matrices
- Delta de Kronecker

Matrices de permutación

- Mul. de matrices de permutación por vectores
- Multiplicación de matrices de permutación

Objetivos

1. Escribir en la forma explícita la matriz de permutación asociada a la permutación dada:

$$P_{4,2,1,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Dada una matriz de permutación en la forma explícita, escribir la permutación correspondiente:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P_{3,1,2,4}.$$

¿Qué aprenderemos?

3. Multiplicar las matrices de permutación por vectores de la base canónica:

$$P_\varphi e_q.$$

4. Multiplicar las matrices de permutación por vectores:

$$P_\varphi x.$$

5. Multiplicar las matrices de permutación por matrices generales:

$$P_\varphi A, \qquad A P_\varphi.$$

6. Multiplicar las matrices de permutación entre si:

$$P_\varphi P_\psi = P_{\varphi\psi}.$$

Prerrequisitos

- Permutaciones, multiplicación de permutaciones.
- Notación para vectores y matrices, multiplicación de matrices.
- Delta de Kronecker, sumas con la delta de Kronecker.

Contenido

Objetivos y requisitos

Repaso rápido

Permutaciones

Multiplicación de matrices

Delta de Kronecker

Matrices de permutación

Mul. de matrices de permutación por vectores

Multiplicación de matrices de permutación

Ejemplo de una permutación del conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$

$\varphi\colon \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$,

$$\varphi(1) \coloneqq 3, \qquad \varphi(2) \coloneqq 2, \qquad \varphi(3) \coloneqq 4, \qquad \varphi(4) \coloneqq 1.$$

Vamos a usar la siguiente notación más concisa:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (3, 2, 4, 1).$$

En este tema no vamos a usar la notación cíclica.

Definición de permutaciones

Una **permutación del conjunto $\{1, \ldots, n\}$**
es una función biyectiva $\{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$.

Definición de permutaciones

Una **permutación del conjunto $\{1, \ldots, n\}$**
es una función biyectiva $\{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$.

Biyectiva significa inyectiva y suprayectiva.

Definición de permutaciones

Una permutación del conjunto $\{1, \ldots, n\}$
es una función biyectiva $\{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$.

Biyectiva significa inyectiva y suprayectiva.

Por ejemplo, la función $\varphi\colon \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$ definida por

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

es inyectiva porque $3, 2, 4, 1$ son diferentes a pares,
y es suprayectiva porque $3, 2, 4, 1$ son todos los elementos de $\{1, 2, 3, 4\}$.

El conjunto de las permutaciones del conjunto $\{1, \ldots, n\}$

Se denota por S_n el conjunto de todas las permutaciones del conjunto $\{1, \ldots, n\}$.

El conjunto de las permutaciones del conjunto $\{1, \ldots, n\}$

Se denota por S_n el conjunto de todas las permutaciones del conjunto $\{1, \ldots, n\}$.

Por ejemplo, el conjunto S_3 consiste de 6 permutaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Multiplicación de permutaciones

Definición (el producto de dos permutaciones)

Sean $\varphi, \psi \in S_n$. El producto $\varphi\psi$ se define como la composición $\varphi \circ \psi$.
En otras palabras, la función $\varphi\psi\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$
se define mediante la siguiente regla:

$$(\varphi\psi)(j) \coloneqq \varphi(\psi(j)).$$

Multiplicación de permutaciones

Definición (el producto de dos permutaciones)

Sean $\varphi, \psi \in S_n$. El producto $\varphi\psi$ se define como la composición $\varphi \circ \psi$.
En otras palabras, la función $\varphi\psi\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$
se define mediante la siguiente regla:

$$(\varphi\psi)(j) \coloneqq \varphi(\psi(j)).$$

Ejemplo:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \varphi\psi$$

Multiplicación de permutaciones

Definición (el producto de dos permutaciones)

Sean $\varphi, \psi \in S_n$. El producto $\varphi\psi$ se define como la composición $\varphi \circ \psi$.
En otras palabras, la función $\varphi\psi\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$
se define mediante la siguiente regla:

$$(\varphi\psi)(j) \coloneqq \varphi(\psi(j)).$$

Ejemplo:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \varphi\psi =$$

Multiplicación de permutaciones

Definición (el producto de dos permutaciones)

Sean $\varphi, \psi \in S_n$. El producto $\varphi\psi$ se define como la composición $\varphi \circ \psi$.
En otras palabras, la función $\varphi\psi\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$
se define mediante la siguiente regla:

$$(\varphi\psi)(j) \coloneqq \varphi(\psi(j)).$$

Ejemplo:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \varphi\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

La inversa de una permutación, repaso

Por definición, cada permutación φ es una función invertible.

La permutación inversa φ^{-1} es la función inversa de φ.

La inversa de una permutación, repaso

Por definición, cada permutación φ es una función invertible.

La permutación inversa φ^{-1} es la función inversa de φ.

Por ejemplo, si

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

entonces

$$\varphi^{-1}$$

La inversa de una permutación, repaso

Por definición, cada permutación φ es una función invertible.

La permutación inversa φ^{-1} es la función inversa de φ.

Por ejemplo, si

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

entonces

$$\varphi^{-1} =$$

La inversa de una permutación, repaso

Por definición, cada permutación φ es una función invertible.

La permutación inversa φ^{-1} es la función inversa de φ.

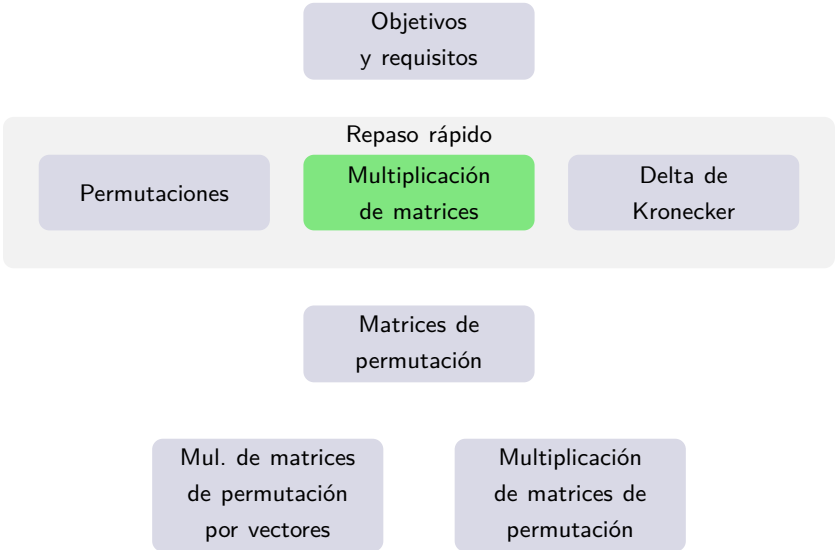
Por ejemplo, si

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

entonces

$$\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Contenido


Objetivos
y requisitos
Repaso rápido
Permutaciones
Multiplicación
de matrices
Delta de
Kronecker
Matrices de
permutación
Mul. de matrices
de permutación
por vectores
Multiplicación
de matrices de
permutación

Importancia de notación

En el siglo XVI fue inventado el simbolismo algebraico:

El cuadrado de la suma de dos términos
es igual al cuadrado del primer término
más el doble producto de ambos términos
más el cuadrado del segundo término.

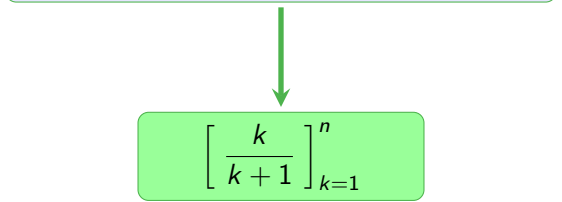
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Notación para construir vectores

la tupla de longitud n

cuya k-ésima componente es igual a $\frac{k}{k+1}$

para cada índice k desde 1 hasta n



$$\left[\frac{k}{k+1} \right]_{k=1}^{n}$$

Notación para construir vectores

la tupla de longitud n

cuya k-ésima componente es igual a $\frac{k}{k+1}$

para cada índice k desde 1 hasta n

$$\left[\frac{k}{k+1} \right]_{k=1}^{n}$$

Por ejemplo,

$$\left[\frac{k}{k+1} \right]_{k=1}^{3} =$$

Notación para construir vectores

la tupla de longitud n
cuya k-ésima componente es igual a $\frac{k}{k+1}$
para cada índice k desde 1 hasta n

$$\left[\ \frac{k}{k+1}\ \right]_{k=1}^{n}$$

Por ejemplo,

$$\left[\ \frac{k}{k+1}\ \right]_{k=1}^{3} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 2/3 \\ 3/4 \end{bmatrix}.$$

Notación para las componentes de vectores en $\mathbb{C}^3$

Dado un vector $v \in \mathbb{C}^3$, denotamos sus componentes por v_1, v_2, v_3:

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}.$$

Esta notación es muy general.
Si el vector se llama ☺, entonces sus componentes son $☺_1$, $☺_2$, $☺_3$:

$$☺ = \begin{bmatrix} ☺_1 \\ ☺_2 \\ ☺_3 \end{bmatrix}.$$

Notación para vectores en $\mathbb{C}^n$

Dado un vector $v \in \mathbb{C}^n$, denotemos por v_j su j-ésima componente.

Dos vectores u y v se llaman iguales si son de la misma longitud (digamos n) y para cada índice j sus j-ésimas componentes son iguales:

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\} \qquad u_j = v_j.$$

Notación para matrices

Denotemos por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ al conjunto de todas las matrices de tamaño $m \times n$ con componentes complejas.

Si A es una matriz, entonces denotemos su componente (j, k) por $A_{j,k}$.

Por ejemplo, si $\sun \in \mathcal{M}_{2\times 3}$, entonces

$$\sun = \begin{bmatrix} \sun_{1,1} & \sun_{1,2} & \sun_{1,3} \\ \sun_{2,1} & \sun_{2,2} & \sun_{2,3} \end{bmatrix}.$$

A veces, es necesario definir una matriz mediante una fórmula para sus componentes:

$$\left[10j + k^2\right]_{j,k=1}^{2,3} = \begin{bmatrix} 11 & 14 & 19 \\ 21 & 24 & 29 \end{bmatrix}.$$

Notación para los renglones de una matriz

Dada una matriz A, denotemos por $A_{j,*}$ a su renglón j.
Por ejemplo, si $A \in \mathcal{M}_{3\times 2}$, entonces

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \\ A_{3,1} & A_{3,2} \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad A_{2,*} = \begin{bmatrix} A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix}.$$

Notación para los renglones de una matriz

Dada una matriz A, denotemos por $A_{j,*}$ a su renglón j.
Por ejemplo, si $A \in \mathcal{M}_{3\times 2}$, entonces

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \\ A_{3,1} & A_{3,2} \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad A_{2,*} = \begin{bmatrix} A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix}.$$

Dada una matriz B, escriba $B_{3,*}$:

$$B = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \\ 7 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B_{3,*} =$$

Notación para los renglones de una matriz

Dada una matriz A, denotemos por $A_{j,*}$ a su renglón j.
Por ejemplo, si $A \in \mathcal{M}_{3\times 2}$, entonces

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \\ A_{3,1} & A_{3,2} \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad A_{2,*} = \begin{bmatrix} A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix}.$$

Dada una matriz B, escriba $B_{3,*}$:

$$B = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \\ 7 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B_{3,*} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Repaso: el producto de una matriz por un vector

Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, $b \in \mathbb{C}^n$. Entonces Ab se define como

$$Ab := \left[\sum_{k=1}^{n} A_{j,k} b_k\right]_{j=1}^{m}.$$

En otras palabras, $Ab \in \mathbb{C}^m$,
y las componentes de Ab se calculan por la siguiente fórmula:

$$(Ab)_j := \sum_{k=1}^{n} A_{j,k} b_k \qquad (j \in \{1, \ldots, m\}).$$

Repaso: el producto de dos matrices

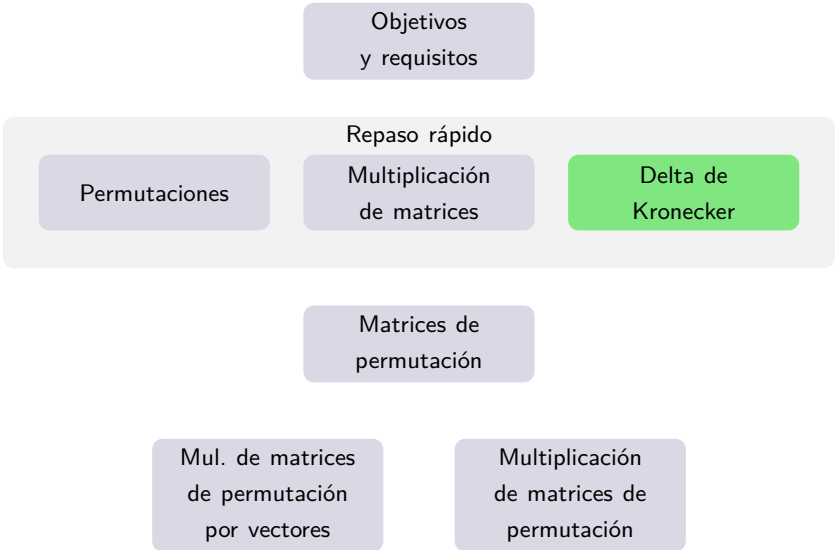
Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{C})$. Entonces, AB se define como

$$AB \coloneqq \left[\sum_{r=1}^{n} A_{j,r}B_{r,k}\right]_{j,k=1}^{m,p}.$$

En otras palabras, $AB \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{C})$,
y las componentes de AB se calculan mediante la siguiente regla:
para cada j en $\{1,\ldots,m\}$ y cada k en $\{1,\ldots,p\}$,

$$(AB)_{j,k} \coloneqq \sum_{r=1}^{n} A_{j,r}B_{r,k}.$$

Contenido


Objetivos
y requisitos
Repaso rápido
Permutaciones
Multiplicación
de matrices
Delta de
Kronecker
Matrices de
permutación
Mul. de matrices
de permutación
por vectores
Multiplicación
de matrices de
permutación

Delta de Kronecker

La función $\delta\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\{0,1\}$ está definida mediante la siguiente regla:

$$\delta_{p,q} := \begin{cases} 1, & \text{si } p = q; \\ 0, & \text{si } p \neq q. \end{cases}$$

Por ejemplo,

$$\delta_{3,5} = 0, \qquad \delta_{7,7} = 1, \qquad \delta_{-1,6} = 0, \qquad \delta_{-2,-2} = 1.$$

Delta de Kronecker

La función $\delta\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\{0,1\}$ está definida mediante la siguiente regla:

$$\delta_{p,q} := \begin{cases} 1, & \text{si } p = q; \\ 0, & \text{si } p \neq q. \end{cases}$$

Por ejemplo,

$$\delta_{3,5} = 0, \qquad \delta_{7,7} = 1, \qquad \delta_{-1,6} = 0, \qquad \delta_{-2,-2} = 1.$$

Evalue la delta de Kronecker en los pares dados
(escriba las respuestas en papel antes de continuar):

$$\delta_{4,4} = \text{?}\ , \qquad \delta_{2,3} = \text{?}\ , \qquad \delta_{-6,-6} = \text{?}\ , \qquad \delta_{-5,4} = \text{?}\ .$$

Delta de Kronecker

La función $\delta\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\{0,1\}$ está definida mediante la siguiente regla:

$$\delta_{p,q} := \begin{cases} 1, & \text{si } p = q; \\ 0, & \text{si } p \neq q. \end{cases}$$

Por ejemplo,

$$\delta_{3,5} = 0, \qquad \delta_{7,7} = 1, \qquad \delta_{-1,6} = 0, \qquad \delta_{-2,-2} = 1.$$

Evalue la delta de Kronecker en los pares dados
(escriba las respuestas en papel antes de continuar):

$$\delta_{4,4} = 1, \qquad \delta_{2,3} = 0, \qquad \delta_{-6,-6} = 1, \qquad \delta_{-5,4} = 0.$$

Fórmula para las sumas con la delta de Kronecker

Proposición

Si $a_1, \ldots, a_n$ son algunos números y $p \in \{1, \ldots, n\}$, entonces

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_{j,p} a_j = a_p.$$

Demostración. La idea principal es dividir la suma en dos partes.

$$\sum_{j=1}^{p} \delta_{j,p} a_j = \sum_{j \in \{p\}} \underbrace{\delta_{j,p}}_{\| \; 1} a_j + \sum_{j \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{p\}} \underbrace{\delta_{j,p}}_{\| \; 0} a_j = 1 \cdot a_p + 0 = a_p.$$

Contenido

Objetivos y requisitos

Repaso rápido

Permutaciones

Multiplicación de matrices

Delta de Kronecker

Matrices de permutación

Mul. de matrices de permutación por vectores

Multiplicación de matrices de permutación

Ejemplo de una matriz de permutación

A cada permutación φ del conjunto $\{1, \ldots, n\}$, le vamos a asociar mediante cierta regla una matriz $n \times n$. Por ejemplo,

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad P_\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lo escribiremos de manera más breve:

$$P_{2,4,3,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejemplos de matrices de permutación

$$P_{4,1,3,5,2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad P_{2,1,3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$P_{3,1,4,2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad P_{2,3,1,4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Hacia la fórmula para la matriz de permutación

Queremos escribir una fórmula general para los elementos de P_φ. Empecemos con un ejemplo:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad P_\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

En la primera columna de P_φ, solamente un elemento es 1, y los demás son cero.

$$(P_\varphi)_{j,1} = \begin{cases} 1, & \text{si } j = 3, \\ 0, & \text{si } j \neq 3 \end{cases} = \delta_{j,3} = \delta_{j,\varphi(1)}.$$

Verifique que

$$(P_\varphi)_{j,2} = \delta_{j,1} = \delta_{j,\varphi(2)}, \qquad (P_\varphi)_{j,3} = \delta_{j,2} = \delta_{j,\varphi(3)}.$$

Escriba una fórmula general para $(P_\varphi)_{j,k}$.

Matrices de permutación

Definición formal

Definición

Sea $\varphi \in S_n$. Entonces

$$P_\varphi := \left[\delta_{j,\varphi(k)}\right]_{j,k=1}^{n}.$$

En otras palabras, $P_\varphi \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, y

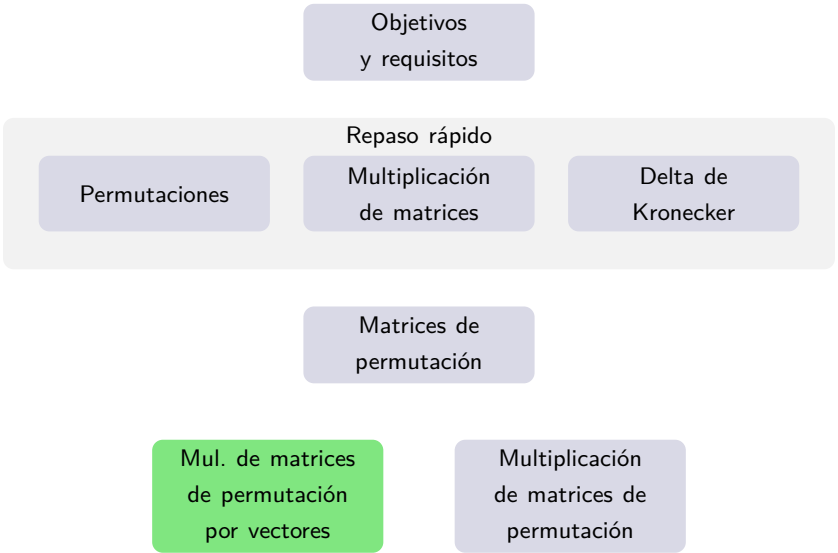
$$(P_\varphi)_{j,k} = \delta_{j,\varphi(k)} \qquad (j,k \in \{1,\ldots,n\}).$$

Ejercicios

Para cada una de las siguientes matrices de permutación,
encuentre la permutación correspondiente:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = P_{?,?,?,?,?}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = P_{?,?,?,?}.$$

Contenido


Objetivos y requisitos
Repaso rápido
Permutaciones
Multiplicación de matrices
Delta de Kronecker
Matrices de permutación
Mul. de matrices de permutación por vectores
Multiplicación de matrices de permutación

El producto de una matriz de permutación por un vector

Ejemplo

Sea $v \in \mathbb{C}^4$ y sea $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. Calcule el producto $P_\varphi v$:

$$P_{3,1,4,2} v = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = ?$$

Escriba por separado las componentes del vector $P_\varphi v$:

$$(P_\varphi v)_1 = v_?, \quad (P_\varphi v)_2 = v_?, \quad (P_\varphi v)_3 = v_?, \quad (P_\varphi v)_4 = v_?.$$

Encuentre una fórmula general. Sugerencia: $(P_\varphi v)_j = v_{\varphi(?)}$.

El producto de una matriz de permutación por un vector

Fórmula general

Proposición

Sean $\varphi \in S_n$, $v \in \mathbb{C}^n$. Entonces,

$$P_\varphi v = \left[v_{\varphi^{-1}(j)}\right]_{j=1}^{n}.$$

En otras palabras, $P_\varphi v \in \mathbb{C}^n$ y

$$(P_\varphi v)_j = v_{\varphi^{-1}(j)} \qquad (j \in \{1, \ldots, n\}).$$

Demostración.

$$(P_\varphi v)_j = \sum_{k=1}^{n} (P_\varphi)_{j,k} v_k = \sum_{k=1}^{n} \delta_{j,\varphi(k)} v_k \xrightarrow{j=\varphi(k) \iff k=\varphi^{-1}(j)} v_{\varphi^{-1}(j)}.$$

El producto de una matriz de permutación por un vector de la base canónica

$$P_{3,1,4,2}e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e_4.$$

El producto de una matriz de permutación por un vector de la base canónica

$$P_{3,1,4,2}e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e_4.$$

Demuestre la fórmula general:

$$P_\varphi e_q = e_{\varphi(q)}.$$

El producto de una matriz de permutación por un vector de la base canónica

$$P_{3,1,4,2}e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e_4.$$

Demuestre la fórmula general:

$$P_\varphi e_q = e_{\varphi(q)}.$$

Recordamos que $e_q = \left[\delta_{q,k}\right]_{k=1}^{n}$.

El producto de una matriz de permutación por una matriz

Ejemplo

Sea $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y sea A una matriz general de clase $\mathcal{M}_{5\times 2}(\mathbb{C})$. Entonces,

$$P_\varphi A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \\ A_{3,1} & A_{3,2} \\ A_{4,1} & A_{4,2} \\ A_{5,1} & A_{5,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{4,1} & A_{4,2} \\ A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{5,1} & A_{5,2} \\ A_{3,1} & A_{3,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix}.$$

Encuentre una fórmula para $(P_\varphi A)_{j,k}$.

El producto de una matriz de permutación por una matriz

Fórmula general

Proposición

Sea $\varphi \in S_m$ y sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$. Entonces

$$P_\varphi A = \left[A_{\varphi^{-1}(p),q}\right]_{p,q=1}^{m,n}.$$

En otras palabras, $P_\varphi A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, y

$$(P_\varphi A)_{p,q} = A_{\varphi^{-1}(p),q} \qquad (p \in \{1,\dots,m\},\ q \in \{1,\dots,n\}).$$

Demostración.

$$(P_\varphi A)_{p,q} = \sum_{k=1}^{m} (P_\varphi)_{p,k} A_{k,q} = \sum_{k=1}^{m} \delta_{p,\varphi(k)} A_{k,q} \overset{p=\varphi(k) \iff k=\varphi^{-1}(p)}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=} A_{\varphi^{-1}(p),q}.$$

El producto de una matriz de permutación por una matriz

Ejercicios

Calcule los siguientes productos en papel antes de continuar:

$$P_{2,4,1,3}\begin{bmatrix} -7 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 5 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$P_{4,2,3,1}\begin{bmatrix} -5 & 7 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & -4 \\ 7 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 7 & -1 & -2 \end{bmatrix} =$$

El producto de una matriz de permutación por una matriz

Ejercicios

Calcule los siguientes productos en papel antes de continuar:

$$P_{2,4,1,3}\begin{bmatrix} -7 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 5 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -7 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix},$$

$$P_{4,2,3,1}\begin{bmatrix} -5 & 7 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & -4 \\ 7 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 7 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 & -4 \\ 3 & 7 & -1 & -2 \\ 7 & 2 & -1 & 0 \\ -5 & 7 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

El producto de una matriz de permutación por una matriz

Ejercicios

Encuentre una permutación $\varphi \in S_5$ tal que

$$P_\varphi \begin{bmatrix} 2 & 7 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -7 & 9 \\ -2 & -5 & 5 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & 5 \\ 9 & 2 & 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 3 & -4 \\ -2 & -5 & 5 & -2 \\ 2 & 7 & -2 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & -7 & 9 \end{bmatrix}.$$

Escriba la respuesta en papel antes de continuar.

El producto de una matriz de permutación por una matriz

Ejercicios

Encuentre una permutación $\varphi \in S_5$ tal que

$$P_\varphi \begin{bmatrix} 2 & 7 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -7 & 9 \\ -2 & -5 & 5 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & 5 \\ 9 & 2 & 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 3 & -4 \\ -2 & -5 & 5 & -2 \\ 2 & 7 & -2 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & -7 & 9 \end{bmatrix}.$$

Escriba la respuesta en papel antes de continuar.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

El producto de una matriz por una matriz de permutación

Ejemplo

Multipliquemos $A \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{C})$ por P_φ, donde $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$:

$$B := AP_{3,1,4,2} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{1,3} & A_{1,1} & A_{1,4} & A_{1,2} \\ A_{2,3} & A_{2,1} & A_{2,4} & A_{2,2} \\ A_{3,3} & A_{3,1} & A_{3,4} & A_{3,2} \end{bmatrix}.$$

B se obtiene de A al cambiar el orden de columnas; por ejemplo,

$$B_{*,1} = A_{*,3} = A_{*,\varphi(1)}.$$

El producto de una matriz por una matriz de permutación

Fórmula general

Proposición

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ y sea $\varphi \in S_n$. Entonces

$$AP_\varphi = \left[A_{j,\varphi(k)}\right]_{j,k=1}^{m,n},$$

esto es, $AP_\varphi \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ y

$$(AP_\varphi)_{j,k} = A_{j,\varphi(k)} \qquad (j \in \{1,\dots,m\},\ k \in \{1,\dots,n\}).$$

Ejercicio: demostar la proposición.

El producto de una matriz por una matriz de permutación

Ejercicios

Escriba los siguientes productos en papel antes de continuar.

$$\begin{bmatrix} -6 & 4 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & 7 & 2 & 3 & -2 \\ 6 & 4 & -8 & 7 & -8 \end{bmatrix} P_{3,5,1,4,2} =$$

$$\begin{bmatrix} 9 & -6 & 7 & 3 & -4 \\ -3 & 1 & 9 & 1 & -2 \\ 7 & 4 & -6 & -3 & 0 \\ 1 & 8 & -1 & -4 & 2 \end{bmatrix} P_{5,2,4,1,3} =$$

El producto de una matriz por una matriz de permutación

Ejercicios

Escriba los siguientes productos en papel antes de continuar.

$$\begin{bmatrix} -6 & 4 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & 7 & 2 & 3 & -2 \\ 6 & 4 & -8 & 7 & -8 \end{bmatrix} P_{3,5,1,4,2} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -6 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 3 & 3 & 7 \\ -8 & -8 & 6 & 7 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 9 & -6 & 7 & 3 & -4 \\ -3 & 1 & 9 & 1 & -2 \\ 7 & 4 & -6 & -3 & 0 \\ 1 & 8 & -1 & -4 & 2 \end{bmatrix} P_{5,2,4,1,3} = \begin{bmatrix} -4 & -6 & 3 & 9 & 7 \\ -2 & 1 & 1 & -3 & 9 \\ 0 & 4 & -3 & 7 & -6 \\ 2 & 8 & -4 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

El producto de una matriz por una matriz de permutación

Ejercicios

Encuentre una permutación $\varphi \in S_5$ tal que

$$\begin{bmatrix} 2 & -7 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 7 & -8 \\ -5 & 4 & -6 & 0 & -3 \\ -2 & 7 & -8 & -1 & 8 \end{bmatrix} P_\varphi = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -7 & -2 & 2 \\ 2 & -8 & 6 & 7 & 0 \\ -6 & -3 & 4 & 0 & -5 \\ -8 & 8 & 7 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Escriba la respuesta en papel antes de continuar.

El producto de una matriz por una matriz de permutación

Ejercicios

Encuentre una permutación $\varphi \in S_5$ tal que

$$\begin{bmatrix} 2 & -7 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 7 & -8 \\ -5 & 4 & -6 & 0 & -3 \\ -2 & 7 & -8 & -1 & 8 \end{bmatrix} P_\varphi = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -7 & -2 & 2 \\ 2 & -8 & 6 & 7 & 0 \\ -6 & -3 & 4 & 0 & -5 \\ -8 & 8 & 7 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Escriba la respuesta en papel antes de continuar.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Contenido

Objetivos y requisitos

Repaso rápido

Permutaciones

Multiplicación de matrices

Delta de Kronecker

Matrices de permutación

Mul. de matrices de permutación por vectores

Multiplicación de matrices de permutación

El producto de dos matrices de permutación

Ejemplo

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$P_\varphi P_\psi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por otro lado,

$$\varphi\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \psi\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Adivine la fórmula general para $P_\varphi P_\psi$.

Producto de dos matrices de permutación

Fórmula general

Teorema

Si $\varphi, \psi \in S_n$, entonces

$$P_\varphi P_\psi = P_{\varphi\psi}.$$

Producto de dos matrices de permutación

Fórmula general

Teorema

Si $\varphi, \psi \in S_n$, entonces

$$P_\varphi P_\psi = P_{\varphi\psi}.$$

Vamos a demostrar la fórmula.

Producto de dos matrices de permutación

Fórmula general

Teorema

Si $\varphi, \psi \in S_n$, entonces

$$P_\varphi P_\psi = P_{\varphi\psi}.$$

Vamos a demostrar la fórmula.

Obviamente, las matrices $P_\varphi P_\psi$ y $P_{\varphi\psi}$ son del mismo tamaño $n \times n$.

Producto de dos matrices de permutación

Fórmula general

Teorema

Si $\varphi, \psi \in S_n$, entonces

$$P_\varphi P_\psi = P_{\varphi\psi}.$$

Vamos a demostrar la fórmula.

Obviamente, las matrices $P_\varphi P_\psi$ y $P_{\varphi\psi}$ son del mismo tamaño $n \times n$.

Nos falta verificar que para cada par de índices p y q,
las matrices $P_\varphi P_\psi$ y $P_{\varphi\psi}$ tienen la misma componente (p, q):

$$(P_\varphi P_\psi)_{p,q} = (P_{\varphi\psi})_{p,q}.$$

Demostración

$$(P_\varphi P_\psi)_{p,q}$$

Demostración

$$(P_\varphi P_\psi)_{p,q} =$$

Demostración

$$(P_\varphi P_\psi)_{p,q} = \sum_{k=1}^{n} (P_\varphi)_{p,k} (P_\psi)_{k,q}$$

Demostración

$$(P_\varphi P_\psi)_{p,q} = \sum_{k=1}^{n} (P_\varphi)_{p,k} (P_\psi)_{k,q} =$$

Demostración

$$(P_\varphi P_\psi)_{p,q} = \sum_{k=1}^{n} (P_\varphi)_{p,k} (P_\psi)_{k,q} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{p,\varphi(k)} \delta_{k,\psi(q)}$$

Demostración

$$(P_\varphi P_\psi)_{p,q} = \sum_{k=1}^{n} (P_\varphi)_{p,k}(P_\psi)_{k,q} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{p,\varphi(k)}\delta_{k,\psi(q)}$$

$$=$$

Demostración

$$(P_\varphi P_\psi)_{p,q} = \sum_{k=1}^{n} (P_\varphi)_{p,k}(P_\psi)_{k,q} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{p,\varphi(k)}\delta_{k,\psi(q)}$$

$$= \sum_{k\in\{\psi(q)\}} \delta_{p,\varphi(k)} \underbrace{\delta_{k,\psi(q)}}_{1} + \sum_{k\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{\psi(q)\}} \delta_{p,\varphi(k)} \underbrace{\delta_{k,\psi(q)}}_{0}$$

Demostración

$$(P_\varphi P_\psi)_{p,q} = \sum_{k=1}^{n} (P_\varphi)_{p,k} (P_\psi)_{k,q} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{p,\varphi(k)} \delta_{k,\psi(q)}$$

$$= \sum_{k \in \{\psi(q)\}} \delta_{p,\varphi(k)} \underbrace{\delta_{k,\psi(q)}}_{1} + \sum_{k \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{\psi(q)\}} \delta_{p,\varphi(k)} \underbrace{\delta_{k,\psi(q)}}_{0}$$

$$=$$

Demostración

$$(P_\varphi P_\psi)_{p,q} = \sum_{k=1}^{n} (P_\varphi)_{p,k}(P_\psi)_{k,q} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{p,\varphi(k)}\delta_{k,\psi(q)}$$

$$= \sum_{k\in\{\psi(q)\}} \delta_{p,\varphi(k)} \underbrace{\delta_{k,\psi(q)}}_{1} + \sum_{k\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{\psi(q)\}} \delta_{p,\varphi(k)} \underbrace{\delta_{k,\psi(q)}}_{0}$$

$$= \delta_{p,\varphi(\psi(q))}$$

Demostración

$$(P_\varphi P_\psi)_{p,q} = \sum_{k=1}^{n} (P_\varphi)_{p,k} (P_\psi)_{k,q} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{p,\varphi(k)} \delta_{k,\psi(q)}$$

$$= \sum_{k \in \{\psi(q)\}} \delta_{p,\varphi(k)} \underbrace{\delta_{k,\psi(q)}}_{1} + \sum_{k \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{\psi(q)\}} \delta_{p,\varphi(k)} \underbrace{\delta_{k,\psi(q)}}_{0}$$

$$= \delta_{p,\varphi(\psi(q))} =$$

Demostración

$$(P_\varphi P_\psi)_{p,q} = \sum_{k=1}^{n} (P_\varphi)_{p,k}(P_\psi)_{k,q} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{p,\varphi(k)}\delta_{k,\psi(q)}$$

$$= \sum_{k\in\{\psi(q)\}} \delta_{p,\varphi(k)} \underbrace{\delta_{k,\psi(q)}}_{1} \quad + \quad \sum_{k\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{\psi(q)\}} \delta_{p,\varphi(k)} \underbrace{\delta_{k,\psi(q)}}_{0}$$

$$= \delta_{p,\varphi(\psi(q))} = \delta_{p,(\varphi\psi)(q)}$$

Demostración

$$(P_\varphi P_\psi)_{p,q} = \sum_{k=1}^{n} (P_\varphi)_{p,k} (P_\psi)_{k,q} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{p,\varphi(k)} \delta_{k,\psi(q)}$$

$$= \sum_{k \in \{\psi(q)\}} \delta_{p,\varphi(k)} \underbrace{\delta_{k,\psi(q)}}_{1} + \sum_{k \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{\psi(q)\}} \delta_{p,\varphi(k)} \underbrace{\delta_{k,\psi(q)}}_{0}$$

$$= \delta_{p,\varphi(\psi(q))} = \delta_{p,(\varphi\psi)(q)} =$$

Demostración

$$(P_\varphi P_\psi)_{p,q} = \sum_{k=1}^{n} (P_\varphi)_{p,k}(P_\psi)_{k,q} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{p,\varphi(k)}\delta_{k,\psi(q)}$$

$$= \sum_{k\in\{\psi(q)\}} \delta_{p,\varphi(k)} \underbrace{\delta_{k,\psi(q)}}_{1} + \sum_{k\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{\psi(q)\}} \delta_{p,\varphi(k)} \underbrace{\delta_{k,\psi(q)}}_{0}$$

$$= \delta_{p,\varphi(\psi(q))} = \delta_{p,(\varphi\psi)(q)} = (P_{\varphi\psi})_{p,q}.$$

El producto de dos matrices de permutación

Ejercicios

Calcule los siguientes productos.
Se recomienda usar la fórmula que acabamos de demostrar.
Haga las comprobaciones escribiendo las matrices en la forma explícita.

$$P_{1,5,4,2,3}P_{3,1,4,2,5} =$$

El producto de dos matrices de permutación

Ejercicios

Calcule los siguientes productos.
Se recomienda usar la fórmula que acabamos de demostrar.
Haga las comprobaciones escribiendo las matrices en la forma explícita.

$$P_{1,5,4,2,3}P_{3,1,4,2,5} = P_{4,1,2,5,3},$$

El producto de dos matrices de permutación

Ejercicios

Calcule los siguientes productos.
Se recomienda usar la fórmula que acabamos de demostrar.
Haga las comprobaciones escribiendo las matrices en la forma explícita.

$$P_{1,5,4,2,3}P_{3,1,4,2,5} = P_{4,1,2,5,3},$$

$$P_{3,1,5,2,4}P_{1,4,2,5,3} =$$

El producto de dos matrices de permutación

Ejercicios

Calcule los siguientes productos.
Se recomienda usar la fórmula que acabamos de demostrar.
Haga las comprobaciones escribiendo las matrices en la forma explícita.

$$P_{1,5,4,2,3}P_{3,1,4,2,5} = P_{4,1,2,5,3},$$

$$P_{3,1,5,2,4}P_{1,4,2,5,3} = P_{3,2,1,4,5},$$

El producto de dos matrices de permutación

Ejercicios

Calcule los siguientes productos.
Se recomienda usar la fórmula que acabamos de demostrar.
Haga las comprobaciones escribiendo las matrices en la forma explícita.

$$P_{1,5,4,2,3}P_{3,1,4,2,5} = P_{4,1,2,5,3},$$

$$P_{3,1,5,2,4}P_{1,4,2,5,3} = P_{3,2,1,4,5},$$

$$P_{4,1,3,2,5}P_{5,2,1,3,4} =$$

El producto de dos matrices de permutación

Ejercicios

Calcule los siguientes productos.
Se recomienda usar la fórmula que acabamos de demostrar.
Haga las comprobaciones escribiendo las matrices en la forma explícita.

$$P_{1,5,4,2,3}P_{3,1,4,2,5} = P_{4,1,2,5,3},$$

$$P_{3,1,5,2,4}P_{1,4,2,5,3} = P_{3,2,1,4,5},$$

$$P_{4,1,3,2,5}P_{5,2,1,3,4} = P_{5,1,4,3,2}.$$