Descomposición de una permutación en transposiciones simples

Objetivos. Demostrar que toda permutación su puede descomponer en transposiciones simples. Definir el número de inversiones de una permutación y estudiar la relación de este número con la descomposición en transposiciones simples.

Requisitos. Producto (composición) de permutaciones.

1. Definición (inversión en una permutación). Sea $\varphi \in S_n$. Una *inversión* en φ es un par de índices (i, j) tal que $1 \le i < j \le n$ y $\varphi(i) > \varphi(j)$.

2. Ejemplo. Las inversiones en la permutación $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ son:

$$(1,4), \quad (2,4), \quad (3,4), \quad (3,5).$$

3. Ejercicio. Escriba todas las inversiones que tienen las siguientes permutaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

4. Notación (número de inversiones en una permutación). Dada $\varphi \in S_n$, denotemos por $\operatorname{inv}(\varphi)$ el número de las inversiones en φ. Es decir,

$$\operatorname{inv}(\varphi) = \sum_{i=1}^{n-1} \left|\{j > i \colon \varphi(j) < \varphi(i)\}\right|.$$

5. Ejemplo. Sea $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 6 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. Entonces

$$\operatorname{inv}(\varphi) = 3 + 2 + 3 + 0 + 1 = 9.$$

6. Ejercicio. Calcule $\operatorname{inv}(\varphi)$, donde

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ n & n-1 & \ldots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Proposición (número de inversiones en una transposición).

1. Sean $p, q \in \{1, \ldots, n\}$ tales que $p < q$. Entonces $\operatorname{inv}(\tau_{p,q}) = 2d - 1$, donde $d = q - p$.
2. En particular, $\operatorname{inv}(\tau_{i,i+1}) = 1$.
3. Por consecuencia, en toda transposición el número de inversiones es impar.

8. Proposición (cambio del número de inversiones al multiplicar por una transposición simple). Sea $\varphi \in S_n$ y sea $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Entonces

$$\operatorname{inv}(\varphi\tau_{k,k+1}) = \begin{cases} \operatorname{inv}(\varphi) - 1, & \text{si } \varphi(k) > \varphi(k+1); \\ \operatorname{inv}(\varphi) + 1, & \text{si } \varphi(k) < \varphi(k+1). \end{cases}$$

9. Corolario. Sea $\varphi \in S_n$ y sea $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Entonces

$$\operatorname{inv}(\varphi\tau_{k,k+1}) \le \operatorname{inv}(\varphi) + 1.$$

10. Lema (en toda permutación distinta de la identidad existe una inversión de vecinos). Sea $\varphi \in S_n$, $\varphi \ne e$. Entonces existe un índice $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ tal que $\varphi(i) > \varphi(i+1)$.

Demostración. Razonamiento por contradicción. Suponemos que $\varphi(i) \le \varphi(i+1)$ para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Como φ es inyectiva, debe ser $\varphi(i) < \varphi(i+1)$ para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Esto implica que si

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\} \quad (i < j) \quad \Longrightarrow \quad (\varphi(i) < \varphi(j).$$

En particular, $\varphi(1) < \varphi(j)$ para todo $j \in \{2, \ldots, n\}$. Por lo tanto, $\varphi(1) = 1$.

Ahora tenemos que $\varphi(2) < \varphi(j)$ para todo $j \in \{3, \ldots, n\}$. De allí $\varphi(2) \in \{1, 2\}$, pero el valor 1 ya está ocupado, y φ es inyectiva. Así que $\varphi(2) = 2$.

Continuando de la misma manera concluimos que $\varphi = e$. Contradicción. □

11. Teorema (descomposición de una permutación en un producto de transposiciones simples). Sea $\varphi \in S_n$. Entonces existen $\operatorname{inv}(\varphi)$ transposiciones simples $\psi_1, \ldots, \psi_{\operatorname{inv}(\varphi)}$ tales que

$$\varphi = \psi_1 \cdots \psi_{\operatorname{inv}(\varphi)}.$$

Demostración. Inducción sobre $\operatorname{inv}(\varphi)$.

Si $\operatorname{inv}(\varphi) = 0$, entonces $\varphi = e$. Por definición el producto de una lista vacía es la identidad, así que en este caso degenerado la afirmación es válida.

Supongamos que la afirmación es válida para $\operatorname{inv}(\varphi) = m$ y la demostremos para $\operatorname{inv}(\varphi) = m + 1$. Sea $\varphi \in S_n$ con $\operatorname{inv}(\varphi) = m + 1$. Como $\operatorname{inv}(\varphi) > 0$, $\varphi \ne e$. Por el lema, existe un índice $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ tal que $\varphi(k) > \varphi(k+1)$.

Por la proposición sobre el cambio del número de inversiones al multiplicar por una transposición simple,

$$\operatorname{inv}(\varphi\tau_{k,k+1}) = \operatorname{inv}(\varphi) - 1 = m.$$

Aplicamos la hipótesis de inducción a la permutación $\varphi\tau_{k,k+1}$: existen transposiciones simples $\psi_1, \ldots, \psi_m$ tales que

$$\varphi\tau_{k,k+1} = \psi_1 \cdots \psi_m.$$

Multiplicando esta igualdad por $\tau_{k,k+1}$ por la derecha y usando el hecho que toda transposición es inversa a si misma, obtenemos que

$$\varphi = \psi_1 \cdots \psi_m \tau_{k,k+1},$$

donde todos los factores en el lado derecho son transposiciones simples. □

12. Nota. En general, la descomposición de una permutación φ en transposiciones simples no es única, aún bajo la condición que el número de los factores es $\operatorname{inv}(\varphi)$. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \tau_{1,2}\tau_{2,3}\tau_{1,2}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \tau_{2,3}\tau_{1,2}\tau_{2,3}.$$

13. Nota. Si $n \geq 2$, entonces toda permutación $\varphi \in S_n$ se puede escribir como un producto de más de $\operatorname{inv}(\varphi)$ permutaciones. Por ejemplo, siempre podemos aumentar una factorización agregando factores de la forma $\tau_{1,2}\tau_{1,2}$.

14. Ejemplo. Descomponer la permutación φ en un producto de $\operatorname{inv}(\varphi)$ transposiciones simples:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solución.

$$\begin{aligned}
\varphi &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \tau_{1,2} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \tau_{2,3}\tau_{1,2} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \tau_{1,2}\tau_{2,3}\tau_{1,2} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \tau_{4,5}\tau_{1,2}\tau_{2,3}\tau_{1,2} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \tau_{3,4}\tau_{4,5}\tau_{1,2}\tau_{2,3}\tau_{1,2} \\
&= \tau_{2,3}\tau_{3,4}\tau_{4,5}\tau_{1,2}\tau_{2,3}\tau_{1,2}.
\end{aligned}$$

Calculemos $\operatorname{inv}(\varphi)$:

$$\operatorname{inv}(\varphi) = 3 + 2 + 0 + 1 = 6. \qquad \square$$

15. Ejercicios. Descomponer permutaciones en productos de transposiciones simples:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

16. Ejercicio. Si $\varphi = \psi_1 \cdots \psi_k$, donde $\psi_1, \ldots, \psi_k$ son transposiciones simples, entonces $k \geq \operatorname{inv}(\varphi)$. Indicación: use el corolario de la proposición sobre el cambio del número de inversiones al multiplicar por una transposición simple.

El ejercicio anterior significa que la permutación φ no se puede escribir como producto de k transposiciones con $k < \operatorname{inv}(\varphi)$.

17. Proposición (número de inversiones en un producto de transposiciones simples). Sea $\varphi = \psi_1 \cdot \ldots \cdot \psi_k$, donde $\psi_1, \ldots, \psi_k$ son transposiciones simples. Entonces $(-1)^{\mathrm{inv}(\psi)} = (-1)^k$, esto es, los números $\mathrm{inv}(\varphi)$ y k tienen la misma paridad.

Demostración. La proposición sobre el cambio del número de inversiones al multiplicar por una transposición simple muestra que la paridad se cambia cada vez cuando multiplicamos una permutación por una transposición simple.

De allí razonando por inducción sobre k es fácil ver que

$$(-1)^{\mathrm{inv}(\psi_1 \cdots \psi_k)} = (-1)^k. \qquad \square$$