Bases ortonormales

Objetivos. Estudiar bases ortonormales en espacios euclidianos y unitarios. Estudiar el concepto de isomorfismos isométricos de espacios con producto interno. Mostrar que todo espacio euclidiano complejo de dimensión n es isométricamente isomorfo a $\mathbb{C}^n$, y todo espacio euclidiano real de dimensión n es isométricamente isomorfo a $\mathbb{R}^n$.

Requisitos. Listas ortogonales y ortonormales, ortogonalización de Gram–Schmidt.

1. Definición (base ortogonal). Una lista de vectores $(b_1, \ldots, b_n)$ se denomina *base ortogonal* en V si es una base y una lista ortogonal.

2. Definición (base ortonormal). Una lista de vectores $(b_1, \ldots, b_n)$ se denomina *base ortonormal* en V si es una base y una lista ortonormal.

3. Proposición (expansión de un vector respecto a una base ortonormal). Sea $b_1, \ldots, b_n$ una base ortonormal de V y sea $v \in V$. Entonces

$$v = \sum_{j=1}^{n} \langle b_j, v \rangle v.$$

4. Proposición (cálculo del producto interno y de la norma a través de las coordenadas en una base ortonormal). Sea V un espacio euclidiano o unitario, sea $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ una base ortonormal de V y sean $v, w \in V$. Entonces

$$\langle v, w \rangle = \langle v_{\mathcal{B}}, w_{\mathcal{B}} \rangle, \qquad \|v\| = \|v_{\mathcal{B}}\|.$$

5. Ejercicio. Demuestre la proposición.

6. Proposición (criterio de base ortonormal). Sea $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ una lista ortonormal en V. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- $(b_1, \ldots, b_n)$ es una base ortonormal en V.
- $\dim(V) = n$.
- $\mathcal{B}$ genera a V.
- Para todo $v \in V$, si v es ortogonal a los vectores $b_1, \ldots, b_n$, entonces $v = \mathbf{0}$.
- Para todo $v \in V$ se cumple la igualdad de Parseval:

$$\|v\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\langle b_k, v \rangle|^2.$$

7. Ejercicio. Demuestre la proposición.

8. Teorema (extensión de una lista ortonormal a una base). Sea V un espacio euclidiano o unitario de dimensión n, sea $m \in \{0, \ldots, n-1\}$ y sean $b_1, \ldots, b_m \in V$ vectores ortonormales. Entonces existen vectores $b_{m+1}, \ldots, b_n \in V$ tales que $b_1, \ldots, b_n$ es una base ortonormal de V.

Demostración. 1. Sea $a_1, \ldots, a_n$ alguna base de V. Apliquemos el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores

$$b_1, \ldots, b_m, a_1, \ldots, a_n. \tag{1}$$

Denotemos por $c_1, \ldots, c_{m+n}$ a los vectores que se obtienen en este proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt. De estos vectores quitamos los vectores cero, normalizamos los demás y los denotemos por $d_1, \ldots, d_k$.

2. Como los vectores $b_1, \ldots, b_m$ ya son ortonormales, el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt no los cambia ($\lambda_{j,k} = 0$ para todos j, k con $1 \le k < j \le m$), así que

$$c_1 = b_1, \ldots c_m = b_m.$$

Otra vez usando el hecho que estos vectores son ortonormales obtenemos que

$$d_1 = c_1 = b_1, \ldots d_m = c_m = b_m,$$

así que la lista $d_1, \ldots, d_k$ es una extensión de la lista original $b_1, \ldots, b_m$.

3. Los vectores $a_1, \ldots, a_n$ forman una base y por lo tanto generan a V. Por lo tanto

$$\ell(b_1, \ldots, b_m, a_1, \ldots, a_n) = V.$$

Sabemos que el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt conserva los subespacios generados:

$$\ell(c_1, \ldots, c_{m+n}) = \ell(b_1, \ldots, b_m, a_1, \ldots, a_n).$$

De la construcción de $d_1, \ldots, d_k$ se sigue que

$$\ell(d_1, \ldots, d_k) = \ell(c_1, \ldots, c_{m+n}).$$

Por lo tanto $\ell(d_1, \ldots, d_k) = V$. Además $d_1, \ldots, d_k$ son ortonormales. Por lo tanto $k = n$ y $d_1, \ldots, d_k$ es una base de V. $\square$

9. Corolario (existencia de una base ortonormal). Sea V un espacio euclidiano o unitario. Entonces existe una base ortonormal de V.