Método matricial de ortogonalización

Objetivos. Estudiar un método de ortogonalización, en el cual se calcula la matriz de Gram de los vectores originales y se transforman simultáneamente los vectores y su matriz de Gram, hasta que la matriz de Gram se convierte en una matriz diagonal.

Requisitos. La matriz de Gram y sus propiedades.

1. Proposición. Sea $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tales que $B = AU$. Denotemos por $\mathcal{A}$ a la lista de columnas de la matriz A y por $\mathcal{B}$ a la lista de columnas de la matriz B. Entonces las matrices de Gram de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ están relacionadas por la siguiente fórmula:

$$G(\mathcal{B}) = U^\top G(\mathcal{A}) U.$$

Demostración. Como ya sabemos, $G(\mathcal{B}) = B^\top B$ y $G(\mathcal{A}) = A^\top A$. Por eso

$$G(\mathcal{B}) = B^\top B = U^\top A^\top A U = U^\top G(\mathcal{A}) U. \qquad \square$$

2. Ejemplo. Vamos a ortogonalizar la siguiente lista de vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Solución. Formamos la matriz de las columnas a_1, a_2, a_3 y calculamos la matriz de Gram:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 5 \\ -2 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & -3 \\ 2 & -8 & -4 \end{bmatrix}, \qquad G(a_1, a_2, a_3) = A^\top A = \begin{bmatrix} 25 & -50 & 25 \\ -50 & 125 & -25 \\ 25 & -25 & 75 \end{bmatrix}.$$

Vamos a hacer ciertas operaciones elementales con las columnas de la matriz A. En la matriz de Gram estas operaciones se aplican *por columnas y por renglones.* Elegimos las operaciones elementales de tal manera que la matriz de Gram se convierta en una matriz diagonal.

En otras palabras, en la matriz que está abajo (matriz de los vectores) se aplican solamente operaciones por columnas, y en la matriz que está arriba (matriz de Gram) se aplican las operaciones por columnas y las mismas por renglones:

$$\left[\begin{array}{rrr} 25 & -50 & 25 \\ -50 & 125 & -25 \\ 25 & -25 & 75 \\ \hline 4 & -6 & 5 \\ -2 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & -3 \\ 2 & -8 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow[C_3 \mathrel{+}= -C_1]{\substack{\text{arriba y abajo:} \\ C_2 \mathrel{+}= 2C_1}} \left[\begin{array}{rrr} 25 & 0 & 0 \\ -50 & 25 & 25 \\ 25 & 25 & 50 \\ \hline 4 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \mathrel{+}= -R_1]{\substack{\text{arriba:} \\ R_2 \mathrel{+}= 2R_1}} \left[\begin{array}{rrr} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 25 \\ 0 & 25 & 50 \\ \hline 4 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & -6 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 25 \\ 0 & 25 & 50 \\ \hline 4 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow[C_3 \mathrel{+}= -C_1]{\text{arriba y abajo:}} \left[\begin{array}{rrr} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 25 & 25 \\ \hline 4 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \mathrel{+}= -R_1]{\text{arriba:}} \left[\begin{array}{rrr} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \\ \hline 4 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & -2 \end{array}\right].$$

Respuesta:

$$b_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Como una comprobación parcial, se recomienda calcular directamente la matriz de Gram de los vectores b_1, b_2, b_3. □

3. Ejercicio. Ortogonalice los sistemas de vectores escritos en los ejercicios de la clase anterior, ahora usando el método matricial.

4. Aclaración: comparación con el método modificado de Gram–Schmidt. Recordamos que el método clásico de Gram–Schmidt consiste en restar de cada vector una combinación lineal de los vectores anteriores (ya ortogonalizados), para hacer el vector nuevo ortogonal a los vectores anteriores. En el **método modificado de Gram–Schmidt** se invierte esta idea: al obtener un vector nuevo b_j, lo restamos (con ciertos coeficientes) de los vectores posteriores, para hacerlos ortogonales al vector b_j. El método matricial explicado en estos apuntes es el método modificado de Gram–Schmidt, pero calculamos los productos internos de una manera especial. Una parte grande de los cálculos consiste en calcular la matriz de Gram $G(\mathcal{A})$ de los vectores originales, luego es más fácil calcular los productos internos de los vectores nuevos en el proceso de ortogonalización. En total, el algoritmo explicado no es más eficiente que el algoritmo de Gram–Schmidt (clásico o modificado).

5. Aclaración: el caso complejo. En este tema trabajamos con matrices reales, pero todo se puede generalizar al caso complejo: en vez de la matriz transpuesta $U^\top$ hay que usar la matriz adjunta (transpuesta conjugada) U^*.