Proyecciones ortogonales

Objetivos. Conocer algunas propiedades de proyecciones en espacios vectoriales (considerados sin producto interno), establecer su correlación con sumas directas. Conocer proyecciones ortogonales en espacios con producto interno, establecer su relación con sumas ortogonales.

Proyecciones

1. Definición (proyección). Sea V un EV/$\mathbb{F}$. Una transformación lineal $P \in \mathcal{L}(V)$ se llama *proyección* si $P^2 = P$.

2. Proposición (descripción de la imagen de una proyección). Sea $P \in \mathcal{L}(V)$ una proyección. Entonces

$$\operatorname{im}(P) = \{v \in V : Pv = v\}.$$

Demostración. 1. Sea $v \in \operatorname{im}(P)$. Entonces existe un $u \in V$ tal que $v = Pu$. De allí

$$Pv = P(Pu) = P^2 u = Pu = v.$$

2. Sea $v \in V$ tal que $Pv = v$. Entonces $v = Pv \in \operatorname{im}(P)$. □

3. Proposición (proyección complementaria). Sea $P \in \mathcal{L}(V)$ una proyección: $P^2 = P$. Entonces $I - P$ también es una proyección, y

$$\operatorname{im}(I-P) = \ker(P), \qquad \ker(I-P) = \operatorname{im}(P).$$

Demostración. 1. Primero checamos que $I - P$ es una proyección:

$$(I-P)^2 = I - 2P + P^2 = I - 2P + P = I - P.$$

2. Demostremos la igualdad $\operatorname{im}(I-P) = \ker(P)$. Si $w \in \operatorname{im}(I-P)$, esto es, $w = (I-P)v$, entonces

$$P(w) = P(I-P)v = (P - P^2)v = (P-P)v = \mathbf{0}.$$

Si $w \in \ker(P)$, entonces $Pw = \mathbf{0}$ y

$$w = w - Pw = (I-P)w \in \operatorname{im}(I-P).$$

3. Para obtener la igualdad $\ker(I-P) = \operatorname{im}(P)$, apliquemos la parte 2 a la proyección $I - P$. □

4. Ejercicio. Demuestre directamente que $\ker(I-P) = \operatorname{im}(P)$.

5. Ejemplo (proyección del plano a una recta). Conseremos el plano con un punto fijo O como espacio vectorial $V^2(O)$. Sean ℓ_1 y ℓ_2 dos rectas que intersectan en el punto O. Sea P la proyección del plano $V^2(O)$ a la recta ℓ_1 paralelamente a la recta ℓ_2.

6. Ejercicio. Cheque que la transformación de $\mathbb{R}^2$ asociada con la matriz

$$P = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$$

es una proyección, construya una base de la imagen y una base del núcleo.

7. Proposición (proyección genera una suma directa). Sea V un EV/$\mathbb{F}$ y sea $P \in \mathcal{L}(V)$ una proyección. Entonces V es la suma directa de sus subespacios $\operatorname{im}(P)$ y $\ker(P)$:

$$V = \operatorname{im}(P) \dotplus \ker(P),$$

8. Proposición (suma directa genera dos proyecciones complementarias). Sea V un EV/$\mathbb{F}$ y sean W_1, W_2 subespacios de V tales que V es suma directa de W_1 y W_2:

$$V = W_1 \dotplus W_2.$$

Entonces existe una única proyección $P \in \mathcal{L}(V)$ tal que

$$\operatorname{im}(P) = W_1, \qquad \ker(P) = W_2.$$

La proyección complementaria $Q = I - P$ tiene imagen W_2 y núcleo W_1.

9. Tarea adicional. Sean $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ matrices tales que $A^2 = A$, $B^2 = B$ y la matriz $I_n - A - B$ es invertible. Demuestre que A y B son del mismo rango: $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B)$.

Proyecciones ortogonales

10. Definición (proyección ortogonal). Sea V un espacio vectorial real o complejo con producto interno. Una transformación lineal $P \in \mathcal{L}(V)$ se llama *proyección ortogonal* si es una proyección y es autoadjunta:

$$P^2 = P \qquad \text{y} \qquad P^* = P.$$

Nota acerca de la terminología. ¿Y por qué se llama proyección *ortogonal*? La siguiente proposición responde esta pregunta.

11. Proposición (criterio de proyección ortogonal). Sea $P \in \mathcal{L}(V)$ una proyección. Entonces:

$$P^* = P \text{ es ortogonal} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \operatorname{im}(P) \perp \ker(P).$$

Demostración. Implicación $\Rightarrow$. Sea $P^* = P$. Sean $u \in \operatorname{im}(P)$, $w \in \ker(P)$, esto es,

$$Pu = u, \qquad Pw = 0.$$

Entonces

$$\langle u, w\rangle = \langle Pu, w\rangle = \langle u, P^* w\rangle = \langle u, \mathbf{0}\rangle = 0.$$

Implicación $\Leftarrow$. Supóngase que $\operatorname{im}(P) \perp \ker(P)$. Demostremos que $P^* = P$, esto es, para todos $u, v \in V$ se tiene que

$$\langle Pu, v\rangle = \langle u, Pv\rangle.$$

Consideremos el lado izquierdo:

$$\langle Pu, v\rangle = \langle Pu, Pv + (I-P)v\rangle = \langle Pu, Pv\rangle + \langle \underbrace{Pu}_{\substack{\cap \\ \operatorname{im}(P)}}, \underbrace{(I-P)v}_{\substack{\cap \\ \operatorname{im}(I-P) \\ \| \\ \ker(P)}}\rangle = \langle Pu, Pv\rangle.$$

De manera similar transformemos el lado derecho:

$$\langle u, Pv\rangle = \langle Pu + (I-P)u, Pv\rangle = \ldots = \langle Pu, Pv\rangle. \qquad \square$$

12. Ejemplo. Sean ℓ_1 y ℓ_2 dos rectas en $V^2(O)$ tales que $\ell_1 \cap \ell_2 = \{O\}$, y sea P la proyección del plano $V^2(O)$ a la recta ℓ_1 paralelamente a la recta ℓ_2. Entonces,

$$P \text{ es ortogonal} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ell_1 \perp \ell_2.$$

13. Corolario (proyección ortogonal genera una suma ortogonal). Sea $P \in \mathcal{L}(V)$ una proyección ortogonal. Entonces V es suma ortogonal de $\operatorname{im}(P)$ y $\ker(P)$:

$$V = \operatorname{im}(P) \oplus \ker(P),$$

esto es,

$$V = \operatorname{im}(P) + \ker(P) \qquad \text{y} \qquad \operatorname{im}(P) \perp \ker(P).$$

14. Corolario (suma ortogonal genera una proyección ortogonal). Sean W_1, W_2 subespacios de V tales que V es suma ortogonal de W_1 y W_2:

$$V = W_1 \oplus W_2.$$

Entonces existe una única proyección $P \in \mathcal{L}(V)$ tal que $\operatorname{im}(P) = W_1$, $\ker(P) = W_2$, y esta proyección es ortogonal: $P^* = P$.

15. Ejercicio (diagonalización unitaria de una proyección ortogonal). Sea $P \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $P^2 = P$ y $P^* = P$.

(b) existe una matriz unitaria $U \in U_n(\mathbb{C})$ y una matriz diagonal D de forma

$$D = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$$

tales que $A = UDU^{-1}$.