Proyección ortogonal de un vector sobre otro

Objetivos. Sea V un espacio con producto interno. Dado un vector no nulo $a \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ y un vector arbitrario $v \in V$ construir dos vectores $u, w \in V$ tales que

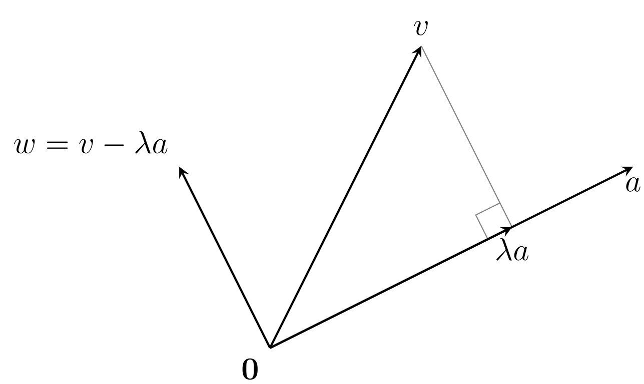
$$u \in \ell(a), \qquad v = u + w, \qquad \langle a, w \rangle = 0.$$

Requisitos. Espacios con producto interno.

Suponemos que V es un espacio vectorial complejo (el caso real es similar). En estos apuntes usamos el convenio que el producto interno es homogéneo respecto al segundo argumento:

$$\forall a, b \in V \quad \lambda \in \mathbb{C} \qquad \langle a, \lambda b \rangle = \lambda \langle a, b \rangle.$$

1. Dibujo (proyección ortogonal de un vector sobre otro). Consideramos un ejemplo con $V = \mathbb{R}^2$, $a \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$, $v \in V$, $u = \lambda a$ y $w = v - u$:



2. Ejercicio. Sean $a, v \in V$, $a \neq \mathbf{0}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Muestre que

$$\langle a, v - \lambda a \rangle = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda = \frac{\langle a, v \rangle}{\langle a, a \rangle}.$$

3. Proposición (proyección ortogonal de un vector sobre otro). Sean $a, v \in V$. Entonces existe un único par de vectores $(u, w) \in V^2$ tales que

$$u \in \ell(a), \qquad v = u + w, \qquad \langle a, w \rangle = 0. \tag{1}$$

Demostración. Si $a = \mathbf{0}$, entonces $u = \mathbf{0}$, $w = v$. Consideremos el caso principal cuando $a \neq \mathbf{0}$.

Unicidad. Supongamos que u y w satisfacen las condiciones (1). Entonces u debe ser de la forma $u = \lambda a$, donde $\lambda \in \mathbb{C}$. De aquí sigue que

$$\begin{aligned}
&\langle a, v - \lambda a\rangle = 0,\\
&\langle a, v\rangle - \lambda\langle a, a\rangle = 0,\\
&\lambda = \frac{\langle a, v\rangle}{\langle a, a\rangle}.
\end{aligned}$$

Finalmente, u y w se expresan en términos de a y v:

$$u = \frac{\langle a, v\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a, \qquad w = v - \frac{\langle a, v\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a, \tag{2}$$

y por lo tanto se determinan de manera única.

Existencia. Definimos u y w por las fórmulas (2). Entonces $u \in \ell(a)$, $v = u + w$,

$$\langle a, u\rangle = \left\langle a, \frac{\langle a, v\rangle}{\langle a, a\rangle}\, a \right\rangle = \frac{\langle a, v\rangle}{\langle a, a\rangle}\, \langle a, a\rangle = \langle a, v\rangle,$$

$$\langle a, w\rangle = \langle a, v - u\rangle = \langle a, v\rangle - \langle a, u\rangle = \langle a, v\rangle - \rangle a, v\rangle = 0. \qquad \square$$

4. Notación. En la situación de la proposición anterior el vector u se llama la *proyección ortogonal* del vector v al vector a o la *proyección ortogonal* del vector v sobre la recta generada por a (si $a \neq \mathbf{0}$). El vector u se denota por $\mathrm{pr}_a(v)$.

5. Ejemplo. En el espacio euclideano $\mathbb{R}^2$ con el producto interno canónico (producto punto) consideramos los vectores

$$a = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

En este caso

$$\lambda = \frac{15 + 5}{10} = 2, \qquad u = 2a = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad w = v - u = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

6. Ejercicio. En la situación de la proposición anterior calcule $\langle w, w\rangle$. Este ejercicio se aplica en la demostración de la desigualdad de Schwarz.