Complemento ortogonal de la imagen de una transformación lineal

Objetivos. Demostrar que el complemento ortogonal de la imagen de una transformación lineal coincide con el núcleo de la transformación adjunta. Ver ejemplos.

Requisitos. Transformación lineal adjunta, complemento ortogonal, núcleo e imagen de una transformación lineal.

1. Teorema (el complemento ortogonal de la imagen de una transformación lineal coincide con el núcleo de la transformación adjunta). Sean V, W espacios euclidianos o unitarios y sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces

$$\operatorname{im}(T)^{\perp} = \ker(T^*).$$

Demostración. La contención $\subseteq$. Sea $u \in \operatorname{im}(T)^{\perp}$, esto es, $u \in W$ y $u \perp w$ para todo $w \in \operatorname{im}(T)$. Mostremos que $u \in \ker(T^*)$ o sea que $T^*u = \mathbf{0}$. Para lo último, demostremos que $\langle T^*u, v\rangle = 0$ para todo $v \in V$.

$$\langle T^*u, v\rangle = \langle u, \underbrace{Tv}_{\substack{\cap \\ \operatorname{im}(T)}}\rangle = 0.$$

La contención $\supseteq$. Sea $u \in \ker(T^*)$, esto es, $T^*u = \mathbf{0}$. Mostremos que $u \in \operatorname{im}(T)^{\perp}$, esto es, $\langle u, w\rangle = 0$ para todo $w \in \operatorname{im}(T)$. Sea $w \in \operatorname{im}(T)$. Por la definición de $\operatorname{im}(T)$, existe un $v \in V$ tal que $w = Tv$. Ahora

$$\langle u, w\rangle = \langle u, Tv\rangle = \langle T^*u, v\rangle = \langle \mathbf{0}, v\rangle = 0. \qquad \square$$

La misma demostración escrita de manera breve.

$$\begin{aligned}
u \in \operatorname{im}(T)^{\perp} \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall w \in \operatorname{im}(T) \quad \langle u, w\rangle = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall v \in V \quad \langle u, Tv\rangle = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall v \in V \quad \langle T^*u, v\rangle = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad T^*u = \mathbf{0} \\
&\Longleftrightarrow \quad u \in \ker(T^*). \qquad \square
\end{aligned}$$

2. Observación. El teorema se puede enunciar de otra manera (equivalente a la anterior):

$$\operatorname{im}(T) = \ker(T^*)^{\perp}.$$

Con palabras: la ecuación $T(v) = w$ con vector incógnito v tiene solución si, y sólo si, w es ortogonal a cualquier solución u de la ecuación $T^*(u) = 0$. Este resultado se conoce como el *teorema de Fredholm* (o el *segundo teorema de Fredholm*).

3. Ejemplo. Considérese la transformación $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$,

$$T(x) = \begin{bmatrix} 3x_1 + x_2 + 5x_3 \\ -x_1 - 2x_3 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 \\ -2x_1 - 5x_2 + x_3 \end{bmatrix}.$$

Construir bases de $\operatorname{im}(T)$ y $\ker(T^*)$, comprobar que $\operatorname{im}(T)^\perp = \ker(T^*)$.

Primera solución. Escribamos la matriz asociada a T con respecto las bases canónicas y reduzcamos esta matriz a una matriz pseudoescalonada aplicando operaciones elementales por renglones:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -2 \\ 4 & 5 & 3 \\ -2 & -5 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4 += 5R_1]{R_3 += -5R_1} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -2 \\ -11 & 0 & -22 \\ 13 & 0 & 26 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4 += 13R_2]{R_3 += -11R_2} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El rango de la matriz es 2, y las primeras dos columnas son linealmente independientes. Una base de $\operatorname{im}(T)$:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Para hallar una base de $\ker(T^*)$, consideremos la matriz asociada a T^* y la llevemos a una matriz pseudoescalonada reducida aplicando operaciones elementales por renglones:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 5 & -5 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 += -2R_1} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 5 & -5 \\ -1 & 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 += R_2]{R_1 += -3R_2}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -11 & 13 \\ 1 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 *= -1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 11 & -13 \\ 1 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solución general:

$$\begin{bmatrix} -5x_3 + 5x_4 \\ -11x_3 + 13x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -5 \\ -11 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 5 \\ 13 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Una base del conjunto solución, esto es, una base de $\ker(T^*)$:

$$u_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ -11 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad u_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 13 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Verifiquemos que los vectores a_1, a_2 que forman una base de $\operatorname{im}(T)$ son ortogonales a los vectores u_1, u_2 que forman una base de $\ker(T^*)$:

$$\begin{bmatrix} \langle a_1, u_1\rangle & \langle a_1, u_2\rangle \\ \langle a_2, u_1\rangle & \langle a_2, u_2\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ -11 & 13 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -15+11+4+0 & 15-13+0-2 \\ -5+0+5+0 & 5+0+0-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esto significa que $\ker(T^*) \subseteq \operatorname{im}(T)^\perp$. Pero

$$\dim\bigl(\operatorname{im}(T)^\perp\bigr) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(\operatorname{im}(T)) = 4 - 2 = 2 = \dim(\ker(T^*)).$$

Por lo tanto, $\ker(T^*) = \operatorname{im}(T)^\perp$. □

Segunda solución. En vez de reducir la matriz asociada a T notemos que las columnas de la matriz T son renglones de la matriz T^*. Cuando se aplican operaciones elementales por renglones, el espacio de renglones no se cambia.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 5 & -5 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdots} \begin{bmatrix} 0 & \boxed{1} & 11 & -13 \\ \boxed{1} & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Una base de $\operatorname{im}(T)$:

$$b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 11 \\ -13 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Comprobación:

$$\begin{bmatrix} \langle b_1, u_1\rangle & \langle b_1, u_2\rangle \\ \langle b_2, u_1\rangle & \langle b_2, u_2\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 11 & -13 \\ 1 & 0 & 5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ -11 & 13 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0-11+11+0 \\ 0+13+0-13 \\ -5+0+5+0 \\ 5+0+0-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Este método de solución es más sencillo porque la eliminación de Gauss-Jordan se aplica sólo una vez. □