Complemento ortogonal

Agradezco a Kevin Jesus Lozano Arroyo por corregir un error grave que yo había cometido en el enunciado del Ejercicio 18 (había olvidado la condición $\mathbf{0}_V \in X$ y $\mathbf{0}_V \in Y$).

Objetivos. Estudiar complemento ortogonal en un espacio euclidiano o unitario. Estudiar la descomposición del espacio en una suma ortogonal.

Requisitos. Sumas directas, sistemas ortogonales, proyección de un vector sobre el subespacio generado por un sistema ortogonal, existencia de una base ortonormal, representación de funcionales lineales.

Complemento ortogonal

1. Observación. Si V es un espacio vectorial sin producto interno, es complemento ortogonal de un conjunto $X \subset V$ se define como un subconjunto del espacio dual V^*:

$$X^\perp := \big\{\varphi \in V^* \colon \forall x \in X \quad \varphi(x) = 0\big\}.$$

Pero si V es un espacio euclidiano o unitario, entonces hay una biyección natural (aditiva y conjugado homogénea) entre V y V^*, y es más cómodo definir $X^\perp$ como un subconjunto del espacio V.

2. Definición (conjuntos ortogonales). Sea V un espacio vectorial con producto interno y sean $X, Y \subset V$. Se dice que X y Y son *ortogonales* y se escribe $X \perp Y$ si $v \perp w$ para todo $v \in X$ y todo $w \in Y$.

3. Definición (vector ortogonal a un conjunto). Sea V un espacio vectorial con producto interno, sea $v \in V$ y sea $Y \subset V$. Se dice que v es *ortogonal* a Y si $v \perp w$ para todo $w \in Y$.

4. Definición (complemento ortogonal de un subconjunto de un espacio vectorial con producto interno). Sean V un espacio vectorial con producto interno y sea $X \subset V$. El *complemento ortogonal* de X se define como el conjunto de todos los vectores en V que son ortogonales a X:

$$X^\perp := \big\{v \in X\colon \quad v \perp X\big\} = \big\{v \in X\colon \quad \forall u \in X \quad \langle v, u\rangle = 0\big\}.$$

5. Proposición (complemento ortogonal es un subespacio). Sea $X \subset V$. Entonces $X^\perp$ es un subespacio vectorial de V.

6. Ejercicio. Demuestre la proposición.

7. Ejercicio (complemento ortogonal de un conjunto decrece cuando el conjunto crece). Sea V un espacio vectorial con producto interno, y sean $X, Y \subset V$ tales que $X \subset Y$. Demuestre que $Y^\perp \subset X^\perp$.

8. Ejemplo. En el espacio $\mathbb{R}^3$ con producto interno canónico consideremos al subespacio S generado por el vector

$$a = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Construya una base de $S^\perp$.

9. Ejercicio (complemento ortogonal del subespacio de matrices diagonales). En el espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ con el producto interno

$$\langle A, B \rangle \coloneqq \operatorname{tr}(A^\top B)$$

consideremos el subespacio S de todas las matrices diagonales:

$$S \coloneqq \big\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon \quad A_{1,2} = A_{2,1} = 0 \big\}.$$

Encuentre una base de S y una base de $S^\perp$.

Suma ortogonal

10. Definición (suma ortogonal). Sea V un espacio vectorial con producto interno y sean S_1, S_2 subespacios de V. Se dice que V es *suma ortogonal* de S_1 y S_2 y se escribe $V = S_1 \oplus S_2$ si

$$V = S_1 + S_2 \qquad \text{y} \qquad S_1 \perp S_2.$$

11. Proposición (suma ortogonal es suma directa). Sea V un espacio euclidiano o unitario y sean S_1, S_2 subespacios de V tales que $V = S_1 \oplus S_2$. Entonces $V = S_1 \dot{+} S_2$.

Demostración. Por la la definición de suma ortogonal ya tenemos que $V = S_1 + S_2$. Falta demostrar que $S_1 \cap S_2 = \{\mathbf{0}_V\}$. Sea $v \in S_1 \cap S_2$, esto es, $v \in S_1$ y $v \in S_2$. Entonces, como $S_1 \perp S_2$, tenemos que $v \perp v$:

$$\langle v, v \rangle = 0.$$

Por la definición de producto interno $v = \mathbf{0}_V$. $\square$

Relaciones entre el complemento ortogonal y la suma ortogonal

12. Lema. Sea V un espacio euclidiano o unitario y sea S un subespacio de V. Entonces existe una base ortonormal de S.

Demostración. Consideremos S como un espacio vectorial con el producto interno *inducido* de V:

$$\forall a, b \in S \qquad \langle a, b\rangle_S := \langle a, b\rangle_V.$$

Como S es un subespacio de V y V es de dimensión finita, S también es de dimensión finita. Por lo tanto existe una base $b_1, \ldots, b_m$ de S cuyos elementos son ortonormales con respecto al producto interno inducido y, por consecuencia, con respecto al producto interno original:

$$\langle b_j, b_k\rangle_S = \langle b_j, b_k\rangle_V = \delta_{j,k}.$$ □

13. Proposición. Sea V un espacio euclidiano o unitario y sea S un subespacio de V. Entonces $V = S \oplus S^\perp$.

Demostración. Sea $a_1, \ldots, a_m$ una base ortonormal de S. Entonces $S = \ell(a_1, \ldots, a_m)$. Por el teorema sobre la proyección de un vector al subespacio generado por un sistema ortogonal, todo vector $v \in V$ se puede escribir de manera única como $u + w$ con $u \in S$ y $w \in S^\perp$. Esto significa que $V = S \dotplus S^\perp$. Además de la definición de $S^\perp$ sigue que $S \perp S^\perp$. Así que $V = S \oplus S^\perp$. □

14. Proposición. Sea V un espacio euclidiano o unitario y sean S_1, S_2 subespacios de V tales que $V = S_1 \oplus S_2$. Entonces $S_2 = S_1^\perp$.

Demostración. 1. La contención $S_2 \subset S_1^\perp$ es obvia: si $v \in S_2$, entonces por la definición de la suma ortogonal tenemos que $v \perp w$ para todo $w \in S_1$, esto es, $v \in S_1^\perp$.

2. Demostremos la contención $S_1^\perp \subset S_2$. Sea $v \in S_1^\perp$. Sabemos que toda suma ortogonal es suma directa. Por eso v se escribe de manera única como $v = u+w$ con $u \in S_1$ y $w \in S_2$. Vamos a demostrar que $u = \mathbf{0}_V$.

Consideremos al producto interno $\langle v, u\rangle$:

$$\underbrace{\langle v, u\rangle}_{\substack{\| \\ 0 \\ \text{porque} \\ v\in S_1^\perp,\ u\in S_1}} = \langle u + w, u\rangle = \langle u, u\rangle + \underbrace{\langle w, u\rangle}_{\substack{\| \\ 0 \\ \text{porque} \\ u\in S_1,\ w\in S_2}}.$$

De allí concluímos que $\langle u, u\rangle = 0$. Por la definición del producto interno esto implica que $u = \mathbf{0}_V$, así que $v = w \in S_2$. □

15. Ejercicio (dimensión del complemento ortogonal). Sea V un espacio euclidiano o unitario y sea S un subespacio de V. Demuestre que

$$\dim(S^\perp) = \dim(V) - \dim(S).$$

16. Ejercicio (complemento ortogonal del complemento ortogonal de un subespacio). Sea V un espacio euclidiano o unitario y sea S un subespacio de V. Demuestre que

$$(S^\perp)^\perp = S.$$

17. Ejercicio (complemento ortogonal del complemento ortogonal de un conjunto). Sea V un espacio euclidiano o unitario y sea X un subconjunto de V (no necesariamente subespacio). Demuestre que

$$(X^\perp)^\perp = \ell(X).$$

18. Ejercicio (complemento ortogonal de la suma de dos subconjuntos). Sea V un espacio vectorial con producto interno y sean $X, Y \subset V$ tales que $\mathbf{0}_V \in X$ y $\mathbf{0}_V \in Y$. Demuestre que

$$(X + Y)^\perp = X^\perp \cap Y^\perp.$$

19. Ejercicio. Muestre que la condición ($\mathbf{0}_V \in X$ y $\mathbf{0}_V \in Y$) en el Ejercicio 18 es esencial, para $\dim(V) \geq 2$. En otras palabras, en un espacio vectorial V con producto interno y con $\dim(V) \geq 2$ construya dos conjuntos X, Y tales que $(X + Y)^\perp \neq X^\perp \cap Y^\perp$.

20. Ejercicio (complemento ortogonal de la intersección de dos subespacios). Sea V un espacio euclidiano o unitario y sean S_1, S_2 subespacios de V. Demuestre que

$$(S_1 \cap S_2)^\perp = S_1^\perp + S_2^\perp.$$

Sugerencia: usar resultados de ejercicios anteriores.