Operadores normales

Objetivos. Estudiar la definición y propiedades básicas de operadores normales en espacios unitarios. Demuestrar que para todo operador normal existe una base ortonormal de vectores propios.

Requisitos. Operador adjunto,operadores autoadjuntos,operadores unitarios, triangulación de Schur (triangulación ortonormal) de un operador lineal.

1. Definición (operador normal). Sea V un espacio euclidiano o unitario. Un operador lineal $T \in \mathcal{L}(V)$ se llama *normal* si conmuta con su operador adjunto:

$$T^*T = TT^*. \tag{1}$$

2. Definición (matriz normal). Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se llama *normal* si

$$A^*A = AA^*.$$

3. Proposición (criterio de operador normal en términos de su matriz asociada respecto una base ortonormal). Sean V un espacio euclidiano o unitario, $\mathcal{B}$ una base ortonormal de V y $T \in \mathcal{L}(V)$. Entonces:

$$T \text{ es normal} \qquad \Longleftrightarrow \qquad T_{\mathcal{B}} \text{ es normal.}$$

4. Ejemplos.

1. Todo operador autoadjunto (que cumple con $T^* = T$) es normal.
2. Toda operador unitario (que cumple con $T^*T = I$ y $TT^* = I$) es normal.
3. Toda matriz diagonal es normal.

5. Ejercicio. Sean $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ una matriz diagonal y $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ una matriz unitaria. Entonces la matriz QDQ^{-1} es normal.

6. Nota. A final de este tema vamos a demostrar que *toda* matriz normal se puede escribir como un producto de la forma QDQ^{-1}, donde Q es unitaria y D es normal.

7. Ejercicio. Dé un ejemplo de matriz normal que no sea autoadjunta ni unitaria.

8. Ejercicio (criterio de operador normal en términos de su parte real e imaginaria). Sean $T, A, B \in \mathcal{L}(V)$, $T = A + \mathrm{i}\, B$, $A^* = A$, $B^* = B$. Entonces:

$$T \text{ es normal} \qquad \Longleftrightarrow \qquad A \text{ y } B \text{ conmutan.}$$

9. Teorema (criterio de operador normal en términos de las normas de las imágenes). Sea V un espacio euclidiano o unitario y sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) T es normal;

(b) $\|Tv\| = \|T^*v\|$ para todo $v \in V$.

Demostración. (a)⇒(b). Sea T normal. Entonces

$$\|Tv\|^2 = \langle Tv, Tv\rangle = \langle T^*Tv, v\rangle = \langle TT^*v, v\rangle = \langle T^*v, T^*v\rangle = \|T^*v\|^2.$$

(b)⇒(a). Supóngase que se cumple (b). Entonces para todo $v \in V$

$$\langle T^*Tv, v\rangle = \langle Tv, Tv\rangle = \|Tv\|^2 = \|T^*v\|^2 = \langle T^*v, T^*v\rangle = \langle TT^*v, v\rangle.$$

Notemos que $\langle v, Uw\rangle$ se puede expresar a través de los valores $\langle Uv, v\rangle$:

$$\langle v, Uw\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}\langle U(\mathrm{i}^k\, v + w), \mathrm{i}^k\, v + w\rangle.$$

De aquí sigue que $T^*T = TT^*$. □

10. Ejercicio. Sea V un espacio euclidiano o unitario y sea $T \in \mathcal{L}(V)$ una transformación normal. Demuestre que

$$\ker(T^*) = \ker(T), \qquad \operatorname{im}(T^*) = \operatorname{im}(T).$$

11. Proposición (vectores propios de la adjunta de una transformación normal). Sea V un espacio euclidiano o unitario y sea $T \in \mathcal{L}(V)$ una transformación normal. Si $Tu = \lambda u$, entonces $T^*u = \overline{\lambda}u$.

Demostración. La transformación $T - \lambda I$ es normal. Aplicamos la proposición anterior a la transformación $T - \lambda I$ y al vector u:

$$0 = \|(T - \lambda I)u\| = \|(T^* - \bar{\lambda} I)u\|.$$

De aquí $T^*u = \bar{\lambda} I$. □

12. Ejercicio (vectores propios de un operador normal asociados a diferentes valores propios son ortogonales entre si). Sean V un espacio euclidiano o unitario, $T \in \mathcal{L}(V)$ un operador normal, $u, v \in V$ tales que $Tu = \lambda u$, $Tv = \mu v$, $\lambda \neq \mu$. Demuestre que $u \perp v$.

13. Teorema (toda matriz normal triangular es diagonal). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ una matriz normal y triangular superior. Entonces A es diagonal.

Demostración. Denotemos por $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ a la base canónica de $\mathbb{C}^n$.

Primer paso. Como A es triangular superior,

$$Ae_1 = \sum_{j=1}^{n} A_{j,1} e_j = A_{1,1} e_1.$$

Por la proposición anterior,

$$A^* e_1 = \overline{A_{1,1}}. \tag{2}$$

Por otro lado,

$$A^* e_1 = \sum_{j=1}^{n} (A^*)_{j,1} e_j = \sum_{j=1}^{n} \overline{A_{1,j}} e_j.$$

Comparando con la igualdad (2) concluimos que $A_{1,2} = \ldots = A_{1,n} = 0$.

Segundo paso. Ya sabemos que $A_{3,2} = \ldots = A_{3,n} = 0$ (por la hipótesis que A es triangular superior) y $A_{1,2} = 0$ (por el resultado del primer paso). Por lo tanto,

$$Ae_2 = A_{2,2} e_2.$$

Por la proposición anterior, $A^* e_2 = \overline{A_{2,2}} e_2$. Por otro lado,

$$A^* e_2 = \sum_{j=1}^{n} (A^*)_{j,2} e_j = \sum_{j=1}^{n} \overline{A_{2,j}} e_j.$$

Así que $A_{2,3} = \ldots = A_{2,n} = 0$.

Continuando este procedimiento (o razonando por inducción matemática) se demuestra que $A_{j,k} = 0$ para todo par de índices (j, k) con $j < k$. $\square$

14. Corolario. Toda matriz normal y triangular inferior es diagonal.

15. Ejercicio. Dé un ejemplo de matriz $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ tal que A^2 sea normal y A no sea normal.

16. Teorema (para todo operador normal en un espacio unitario existe una base ortonormal que consiste en sus vectores propios). Sea V un espacio unitario y sea $T \in \mathcal{L}(V)$ un operador normal. Entonces existe una base ortonormal $\mathcal{B}$ de V cuyos elementos son vectores propios de T.

Demostración. Sigue inmediatamente del teorema sobre la triangulación ortonormal de un operador lineal y del teorema 13 de una matriz normal y triangular superior.

En efecto, primero construimos una base ortonormal $\mathcal{B}$ del espacio V tal que $T_{\mathcal{B}}$ es triangular superior. Como T es normal y la base $\mathcal{B}$ es ortonormal, la matriz $T_{\mathcal{B}}$ es normal. Pero toda matriz normal y triangular superior es diagonal. Así que la matriz $T_{\mathcal{B}}$ es diagonal. Esto significa que $\mathcal{B}$ consiste en vectores propios de T. $\square$

17. Tarea adicional. Demuestre el teorema por inducción sobre $\dim(V)$ sin usar el teorema de la triangulación ortonormal (pero usando algunas ideas de su demostración).

18. Ejercicio. Demuestre el teorema recíproco: Si T es un operador lineal en un espacio unitario V y existe una base ortonormal de V que consta de vectores propios de T, entonces T es normal.

19. Corolario (diagonalización de Schur de una matriz normal). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Entonces existe una matriz unitaria Q tal que $Q^{-1}AQ$ es diagonal.

20. Ejercicio. Encuentre una diagonalización de Schur de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}.$$

21. Ejercicio. Construya una matriz $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ tal que A^2 sea normal pero A no sea normal.

22. Ejercicio (operadores normales nilpotentes). Sea V un espacio unitario, sea $T \in \mathcal{L}(V)$ un operador normal y nilpotente. Lo último significa que $T^k = \mathbf{0}$ para algún k. Demuestre que $T = \mathbf{0}$.

23. Ejercicio (núcleo de las potencias de un operador normal). Sean V un espacio unitario y $T \in \mathcal{L}(V)$ un operador normal. Demuestre que para todo $k \in \{1, 2, \ldots\}$

$$\ker(T^k) = \ker(T).$$

24. Sea V un espacio unitario, sea $T \in \mathcal{L}(V)$ un operador normal y sea $f \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ un polinomio. Demuestre que la transformación $f(T)$ es normal.

25. Tarea adicional. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ una matriz normal. Demuestre que existe un polinomio $f \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ tal que

$$A^* = f(A).$$

Indicación: primero considere el caso cuando A es una matriz diagonal.