Norma y distancia inducidas por un producto interno

Objetivos. Definir la norma y la distancia en un espacio vectorial V real o complejo con un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Requisitos. Definición y ejemplos de espacios con producto interno, desigualdad de Schwarz (llamada también desigualdad de Cauchy–Schwarz o desigualdad de Cauchy–Bunyakovski–Schwarz).

En estos apuntes usamos el convenio que el producto interno es homogéneo con respecto al segundo argumento:

$$\langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle.$$

1. Desigualdad de Schwarz (repaso). Sea V un espacio vectorial complejo o real con un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Entonces para todos $x, y \in V$

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle. \tag{1}$$

2. Criterio de la igualdad en la desigualdad de Schwarz (repaso). Sean $x, y \in V$. Entonces la igualdad

$$|\langle x, y \rangle|^2 = \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

se cumple si y sólo si los vectores x, y son linealmente dependientes.

Definición general de norma

Empecemos con la definición general de norma en un espacio vectorial complejo (el caso real es similar).

3. Definición (norma en un espacio vectorial). Sea V un espacio vectorial complejo. Una función $\|\cdot\| \colon V \to \mathbb{R}$ se llama *norma* si cumple con las siguientes propiedades (*axiomas de norma*):

1. Propiedad *subaditiva* (o *desigualdad triangular* para la norma):

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \forall x, y \in V.$$

2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ para todo $x \in V$ y todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

3. $\|x\| > 0$ para todo $x \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Si $\|\cdot\|$ es una norma, entonces se dice que $(V, \|\cdot\|)$ es un *espacio normado*.

4. Ejemplos de normas en $\mathbb{C}^n$. En el espacio vectorial $\mathbb{C}^n$ hay una infinidad de normas diferentes. Las más importantes son:

$$\|a\|_1 \coloneqq \sum_{k=1}^{n} |a_k|, \qquad \|a\|_2 \coloneqq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \right)^{1/2}, \qquad \|a\|_\infty \coloneqq \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|.$$

Norma inducida por un producto interno

5. Proposición (de la norma inducida por un producto interno). Sea V un espacio vectorial complejo con un producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Entonces la función $N\colon V\to[0,+\infty)$ definida mediante la siguiente regla es una norma sobre V:

$$N(x) \coloneqq \sqrt{\langle x,x\rangle} \qquad (x\in V).$$

Demostración. 1. Si $x\neq\mathbf{0}$, entonces $\langle x,x\rangle>0$ y por lo tanto $N(x)>0$.

2. $\langle\lambda x,\lambda x\rangle=\overline{\lambda}\lambda\langle x,x\rangle=|\lambda|^2\,\langle x,x\rangle$. Sacamos la raíz cuadrada: $N(\lambda x)=|\lambda|\,N(x)$.

3. Usando la desigualdad de Schwarz demostremos la propiedad subaditiva de la norma. Primero notemos que

$$\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle=2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle\leq 2|\langle x,y\rangle|.$$

Aquí hemos aplicado con $\alpha=\langle x,y\rangle$ las fórmulas generales

$$\alpha+\overline{\alpha}=2\,\mathrm{Re}(\alpha),\qquad \mathrm{Re}(\alpha)\leq|\,\mathrm{Re}(\alpha)|\leq|\alpha|.$$

Luego notemos que la desigualdad de Schwarz se puede escribir de la siguiente manera:

$$|\langle x,y\rangle|\leq N(x)\,N(y).$$

Ahora es fácil demostrar la propiedad subaditiva:

$$\begin{aligned}
N(x+y)^2 &= \langle x+y,x+y\rangle\\
&= \langle x,x\rangle+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+\langle y,y\rangle\\
&= N(x)^2+2\,\mathrm{Re}(\langle x,y\rangle)+N(y)^2\\
&\leq N(x)^2+2|\langle x,y\rangle|+N(y)^2\\
&\leq N(x)^2+2N(x)N(y)+N(y)^2\\
&= (N(x)+N(y))^2.
\end{aligned}$$

□

6. Definición (norma inducida por un producto interno). Sea V un espacio vectorial complejo con un producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ La *norma* en V *inducida por el producto interno*, se define mediante la regla

$$\|x\| \coloneqq \sqrt{\langle x,x\rangle}.$$

7. Tarea adicional. Determine cuándo se cumple la igualdad $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$.

8. Ejercicio. Sea $\|\cdot\|$ la norma inducida por un producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Demuestre que

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \|x\|^2+\|y\|^2+2\,\mathrm{Re}(\langle x,y\rangle);\\
\|x-y\|^2 &= \|x\|^2+\|y\|^2-2\,\mathrm{Re}(\langle x,y\rangle).
\end{aligned}$$

9. Ejercicio (identidad de paralelogramo). Demuestre que la norma inducida por un producto interno satisface la siguiente propiedad (*identidad de paralelogramo*):

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \qquad \forall x, y \in V.$$

10. Ejercicio (identidades de polarización en el caso real). Sean V un EV real con un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, y sea $\| \cdot \|$ la norma inducida por este producto interno. Demuestre las siguientes igualdades:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right), \qquad \langle x, y \rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right).$$

11. Proposición (identidad de polarización en el caso complejo). Sea V un espacio vectorial complejo con un producto interno. Entonces el producto interno se puede expresar a través de la norma inducida por este producto interno mediante la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle &= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \, \| \, \mathrm{i}^k \, x + y\|^2 \\ &= \frac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2 + \mathrm{i} \, \| \, \mathrm{i} \, x + y\|^2 - \| - x + y\|^2 - \mathrm{i} \, \| - \mathrm{i} \, x + y\|^2\Big).\end{aligned}$$

12. Ejercicio. Demuestre la identidad de polarización en el caso complejo.

13. Ejemplo. La función $\|x\|_1 := |x_1| + |x_2|$ es una norma en $\mathbb{C}^2$. Demostremos que esta norma no se puede inducir por ningún producto interno. Construyamos un contraejemplo para la identidad de paralelogramo:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \|x+y\|_1^2 + \|x-y\|_1^2 = 8, \quad 2(\|x\|_1^2 + \|y\|_1^2) = 4.$$

Ángulo entre dos vectores en un espacio real con producto interno

14. Definición (ángulo entre dos vectores en un espacio real con producto interno). Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean u, v vectores no nulos en V. El *ángulo* entre u y v, denotado por $\angle(x, y)$, se define como

$$\angle(x, y) = \arccos \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \, \|y\|}.$$

La desigualdad de Schwarz garantiza que el cociente $\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \, \|y\|}$ toma valores entre -1 y 1, por eso el $\arccos$ de este cociente está bien definido.

15. Ejercicio. En el espacio $\mathbb{R}^n$ con el producto interno canónico consideremos dos vectores:

$$u = e_1 = \big[1, 0, \ldots, 0\big]^\top, \qquad v = e_1 + e_2 + \ldots + e_n = \big[1, 1, \ldots, 1\big]^\top.$$

Notemos que e_1 es un lado del cubo unitario y v es la diagonal de este cubo. Calcule $\angle(u, v)$. Calcule el límite de $\angle(u, v)$ cuando $n \to \infty$.

Definición general de distancia

Recordemos la definición general de distancia.

16. Definición (distancia). Sea X un conjunto. Una función $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ se llama *distancia* o *métrica* en X si cumple con las siguientes propiedades (*axiomas de métrica*):

1. $d(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in X$.
2. Si $x, y \in X$ y $d(x, y) = 0$, entonces $x = y$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$ para todos $x, y \in X$.
4. *Desigualdad triangular*:

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \qquad \forall x, y, z \in X.$$

Si d es una métrica en X, entonces se dice que (X, d) es un *espacio métrico*.

Distancia inducida por una norma

17. Proposición (de la distancia inducida por una norma). Sea V un espacio vectorial real o complejo y sea $\|\cdot\|$ una norma en V. Entonces la función $d\colon V \times V \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente regla es una distancia en V:

$$\forall x, y \in V \qquad d(x, y) := \|x - y\|.$$

18. Ejercicio. Demuestre la proposición.

19. Definición (distancia inducida por una norma). Sea V un espacio vectorial con una norma $\|\cdot\|$. La *distancia* (*métrica*) *inducida* por la norma $\|\cdot\|$ se define mediante la siguiente fórmula:

$$d(x, y) := \|x - y\|.$$

20. Resumen. Un espacio vectorial real o complejo con un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se puede considerar como un espacio normado con la norma

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

y como un espacio métrico con la métrica

$$d(x, y) := \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}.$$

La norma se puede expresar a través de la métrica mediante la fórmula $\|x\| = d(x, 0)$, y el producto interno se puede expresar a través de la norma mediante la identidad de polarización.