Multiplicación de matrices por vectores

Ejercicios

Objetivos. Aprender a multiplicar matrices por vectores columnas (elementos de $\mathbb{R}^n$). Ver que el producto de una matriz por un vector se puede representar como una combinación lineal de las columnas de la matriz.

Requisitos. Notación para entradas de matrices.

Modelo. $$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} au + bv + cw \\ du + ev + fw \end{bmatrix}.$$

1. Calcule el producto:

$$\begin{bmatrix} 3 & -7 & 2 \\ -4 & 5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \quad + \quad 7 \quad - \quad 6 \\ \hline -16 \quad + \qquad\qquad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}.$$

Calcule los productos:

2. $$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 4 & 3 \\ 7 & 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \qquad\qquad \\ \hline \qquad\qquad \\ \hline \qquad\qquad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}.$$

3. $$\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 4 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \qquad\qquad \\ \hline \qquad\qquad \\ \hline \qquad\qquad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}.$$

4. $$\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \qquad\qquad \\ \hline \qquad\qquad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}.$$

Observaciones acerca de los tamaños

5. Notemos que el siguiente producto no está definido porque el vector es demasiado largo:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} at + bu + cv + ???\, w \\ dt + eu + fv + ???\, w \end{bmatrix} \qquad \leftarrow \quad \text{el producto no está definido.}$$

6. El siguiente producto no está definido porque el vector es más corto que los renglones de la matriz:

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} at + bu + c\, ??? + d\, ??? \\ et + fu + g\, ??? + h\, ??? \end{bmatrix} \qquad \leftarrow \quad \begin{array}{c} \text{el producto} \\ \text{no está definido.} \end{array}$$

7. ¿De qué longitud debe ser el vector para que el producto esté bien definido? Para que esté definido el producto de una matriz A por un vector b, la longitud del vector b debe ser igual:

○ al número de los renglones de la matriz A;

○ al número de las columnas de la matriz A.

8. ¿De qué tamaño es el producto de una matriz por un vector? La longitud del vector Ab es igual:

○ al número de los renglones de la matriz A;

○ al número de las columnas de la matriz A.

Hacia la fórmula general para las entradas del producto de una matriz por un vector

9. Exprese las entradas del producto Ab a través de las entradas de la matriz A y del vector b:

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rule{4cm}{0.4pt} \end{bmatrix}.$$

En particular, escriba la segunda componente del vector Ab:

$$(Ab)_2 \quad = \qquad\qquad + \qquad\qquad + \qquad\qquad = \sum_{k=1}^{3} \underbrace{\qquad\qquad}_{?}$$

10. Sea A una matriz 5×4 y sea b un vector de longitud 4:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} \\ A_{4,1} & A_{4,2} & A_{4,3} & A_{4,4} \\ A_{5,1} & A_{5,2} & A_{5,3} & A_{5,4} \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}.$$

Entonces el producto Ab es un vector de longitud $\underbrace{\qquad}_{?}$.

Escriba su segunda componente:

$$(Ab)_2 = \underbrace{\qquad\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad\qquad}_{?} = \sum_{j=1}^{\overbrace{\qquad}^{?}} \underbrace{\qquad\qquad}_{?}$$

Escriba su quinta componente:

$$(Ab)_5 = \underbrace{\qquad\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad\qquad}_{?} = \sum_{j=1}^{\overbrace{\qquad}^{?}} \underbrace{\qquad\qquad}_{?}$$

Definición formal del producto de una matriz por un vector

11. Definición. Sea A una matriz de tamaño $m \times n$ y sea b un vector de longitud $\underbrace{\qquad}_{?}$.

Entonces Ab es un vector de longitud $\underbrace{\qquad}_{?}$, y para cada índice $i \in \{1, \ldots, \underbrace{\quad}_{?}\}$

la i-ésima componente del vector Ab se calcula de la siguiente manera:

$$(Ab)_i \quad = \quad \underbrace{\qquad\quad}_{?} + \underbrace{\qquad\quad}_{?} + \ldots + \underbrace{\qquad\quad}_{?} \quad = \quad \sum_{k=1}^{\overbrace{\quad}^{?}} \underbrace{\qquad\quad}_{?}$$

12. Otra forma de la definición, modelo. Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ y sea $b \in \mathbb{R}^?$. Entonces

$$Ab = \left[\sum_{j=1}^{?} A_{?,?}\, b_? \right]_{i=1}^{?}.$$

13. Otra forma de la definición. Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ y sea $b \in \underbrace{\qquad}_{?}$. Entonces

$$Ab = \left[\qquad\qquad\qquad \right]$$

Producto de una matriz por un vector como una combinación lineal de las columnas de la matriz

14. Notemos que:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} au + bv + cw \\ du + ev + fw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} au \\ \\ du \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \qquad \\ \\ \qquad \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \qquad \\ \\ \qquad \end{bmatrix}$$

$$= u \begin{bmatrix} a \\ \\ d \end{bmatrix} + \underbrace{\qquad}_{?} \begin{bmatrix} \qquad \\ \\ \qquad \end{bmatrix} + \underbrace{\qquad}_{?} \begin{bmatrix} \qquad \\ \\ \qquad \end{bmatrix}.$$

15. Sean

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \\ A_{3,1} & A_{3,2} \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Escriba el producto Ab y represéntelo como una combinación lineal de las columnas de A:

$$Ab = \begin{bmatrix} \qquad\qquad \\ \\ \\ \qquad\qquad \end{bmatrix} = \underbrace{\qquad}_{?} \begin{bmatrix} \qquad \\ \\ \\ \qquad \end{bmatrix} + \underbrace{\qquad}_{?} \begin{bmatrix} \qquad \\ \\ \\ \qquad \end{bmatrix}.$$

En forma breve,

$$Ab = \underbrace{\qquad}_{?} A_{*,1} + \underbrace{\qquad}_{?} A_{*,2} = \sum_{j=1}^{2} \underbrace{\qquad}_{?} A_{*,j}.$$

16. Fórmula general. El producto Ab se puede escribir como una combinación lineal de las columnas de la matriz A:

$$Ab \quad = \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad\qquad}_{?} + \ldots + \underbrace{\qquad\qquad}_{?} \quad = \quad \sum \qquad\qquad\qquad .$$