Cambio de la estructura cíclica de una permutación al multiplicarla por una transposición

Objetivos. Comprender cómo se cambia la estructura cíclica de una permutación al multiplicarla por una transposición.

Requisitos. Permutaciones, descomposición de una permutación en un producto de ciclos disjuntos.

1. Ejemplo. Calcular $c_7(2,5,4)c_7(5,1,6,3)$.

2. Ejemplo. Calcular $c_7(6,1,4,3)\tau_{3,5}$.

3. Ejemplo. Calcular $c_7(4,6,1,3,2)\tau_{2,6}$.

4. Producto de dos ciclos que tienen un elemento común. Sean $a_1,\ldots,a_p,\ldots,a_q$ algunos elementos del conjunto $\{1,\ldots,n\}$ diferentes a pares. Entonces

$$\mathrm{c}_n(a_1,\ldots,a_p)\,\mathrm{c}_n(a_p,\ldots,a_q)=\mathrm{c}_n(a_1,\ldots,a_q).$$

5. Un caso particular de la fórmula anterior: si $a_1,\ldots,a_p,a_{p+1}$ son algunos elementos diferentes del conjunto $\{1,\ldots,n\}$ diferentes a pares, entonces

$$\mathrm{c}_n(a_1,\ldots,a_p)\tau_{a_p,a_{p+1}}=\mathrm{c}_n(a_1,\ldots,a_p,a_{p+1}).$$

6. Producto de un ciclo por una transposición de dos elementos del ciclo. Sean $a_1,\ldots,a_p,\ldots,a_q$ algunos elementos del conjunto $\{1,\ldots,n\}$ diferentes a pares. Entonces

$$\mathrm{c}_n(a_1,\ldots,a_p,a_{p+1},\ldots,a_q)\tau_{a_q,a_p}=\mathrm{c}_n(a_1,\ldots,a_p)\,\mathrm{c}_n(a_{p+1},\ldots,a_q).$$

7. Teorema sobre el cambio del decremento de una permutación al multiplicarla por una transposición. Sea $\varphi\in S_n$ y sean $p,q\in\{1,\ldots,n\}$ con $p\neq q$. Entonces

$$\mathrm{d}(\varphi\tau_{p,q})=\begin{cases}\mathrm{d}(\varphi)-1, & \text{si } p \text{ y } q \text{ pertenecen a un ciclo en la descomposición de } \varphi;\\ \mathrm{d}(\varphi)+1, & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Idea de demostración. Si p y q pertenecen a un ciclo en la descomposición de φ, entonces al multiplicar φ por $\tau_{p,q}$ este ciclo se rompe en dos, y d se disminuye a uno.

Si p y q pertenecen a dos ciclos diferentes en la descomposición de φ, entonces al multiplicar φ por $\tau_{p,q}$ estos dos ciclos se pegan (se convierten en un ciclo), y d se aumenta a uno. □

8. Corolario. Sea $\varphi\in S_n$ y sean $p,q\in\{1,\ldots,n\}$ con $p\neq q$. Entonces

$$(-1)^{\mathrm{d}(\varphi\tau_{p,q})}=-(-1)^{\mathrm{d}(\varphi)}.$$