Rango y menores de una matriz

Objetivos. Establecer una relación entre el rango de una matriz y los tamaños de sus menores no nulos (en otra terminología, demostrar, que el *rango de menores* de una matriz coincide con su rango de renglones).

Requisitos. Rango de una matriz, determinante y sus propiedades, criterio de invertibilidad de una matriz en términos de su determinante.

1. Notación para submatrices (repaso). Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ y sea $I \subset \{1, \ldots, m\}$, $J \subset \{1, \ldots, n\}$. Entonces denotamos por $A_{I,J}$ a la submatriz ubicada en la intersección de los renglones con índices pertenecientes a I y las columnas con índices pertenecientes a J. Por ejemplo, si

$$A \in \mathcal{M}_{4,5}(\mathbb{F}), \qquad I = \{1, 3, 4\}, \qquad J = \{3, 5\},$$

entonces la matriz $A_{I,J}$ está formada de las entradas coloreadas de la matriz A:

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} & A_{1,5} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} & A_{2,5} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} & A_{3,5} \\ A_{4,1} & A_{4,2} & A_{4,3} & A_{4,4} & A_{4,5} \end{bmatrix},$$

así que

$$A_{I,J} = A_{\{1,3,4\},\{3,5\}} = \begin{bmatrix} A_{1,3} & A_{1,5} \\ A_{3,3} & A_{3,5} \\ A_{4,3} & A_{4,5} \end{bmatrix}.$$

Esta notación resulta ser muy cómoda. Sus análogos se usan en varios lenguajes de programación. Por ejemplo, en MATLAB los siguientes comandos generan una matriz A con entradas aleatorias y luego sacan su submatriz $A_{\{1,3,4\},\{3,5\}}$:

```
A = rand(4, 5)

A([1, 3, 4], [3, 5])
```

2. Lema (sobre dependencias lineales en una submatriz). Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ y sea B una submatriz de A formada por algunas de las columnas de A, esto es, $B = A_{*,J}$, donde $J \subset \{1, \ldots, n\}$, $|J| = q \leq n$.

Entonces los renglones de B heredan todas las dependencias lineales que tienen los renglones de A. Más formalmente, si $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{F}$ y

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k A_{k,*} = \mathbf{0}_n, \tag{1}$$

entonces

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k B_{k,*} = \mathbf{0}_q. \tag{2}$$

Demostración. La igualdad (1) significa que

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k A_{k,j} = 0$$

para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$. En particular, esta igualdad se cumple para todo $j \in J$, lo cual quiere decir que se cumple (2). $\square$

3. Problema. Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$, sean $I \subset \{1, \ldots, m\}$, $J \subset \{1, \ldots, n\}$ conjuntos de índices tales que los renglones $A_{i,*}$, $i \in I$, son linealmente independientes y las columnas $A_{*,j}$, $j \in J$, son linealmente independientes. Sea $B = A_{I,J}$. ¿Es cierto que los renglones y las columnas de B son linealmente independientes?

4. Ejemplo.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad I = \{1, 2\}, \qquad J = \{3, 4\}, \qquad B = A_{I,J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Los renglones $A_{1,*}$, $A_{2,*}$ son linealmente independientes, las columnas $A_{*,3}$, $A_{*,4}$ son linealmente independientes, pero la matriz $B = A_{\{1,2\},\{3,4\}}$ es nula.

El ejemplo muestra que hay que tener cuidado y que el siguiente lema no es tan trivial.

5. Lema (sobre la submatriz formada de renglones básicos y columnas básicas). Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ una matriz de rango r. Supongamos que los renglones de A con índices $i_1, \ldots, i_r$ son linealmente independientes y las columnas de A con índices $j_1, \ldots, j_r$ son linealmente independientes. Entonces la matriz

$$C \coloneqq A_{\{i_1,\ldots,i_r\},\{j_1,\ldots,j_r\}}$$

ubicada en la intersección de estos renglones y estas columnas es invertible.

Demostración. 1. Consideremos la matriz

$$B \coloneqq A_{\{i_1,\ldots,i_r\},*}.$$

Por la hipótesis del lema los renglones de B son linealmente independientes, así que $\mathrm{r}(B) = r$.

2. Todas las columnas de la matriz A son combinaciones lineales de las columnas con índices $j_1, \ldots, j_r$. Por el Lema 2, lo mismo tenemos en la submatriz B. Esto significa que las columnas $B_{*,j_1}, \ldots, B_{*,j_r}$ forman generan a todas las columnas de B.

3. De 1 y 2 sigue que las columnas $B_{*,j_1}, \ldots, B_{*,j_r}$ forman una base del subespacio generado por las columnas de B y por lo tanto son linealmente independientes. Por consecuencia, la matriz C formada de estas columnas es invertible. $\square$

6. Lema (sobre los renglones y las columnas de una matriz que pasan a través de un menor no nulo). Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$. Supongamos que

$$M_A \begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_p \\ j_1, \ldots, j_p \end{pmatrix} \neq 0.$$

Entonces los renglones $i_1, \ldots, i_p$ de la matriz A son linealmente independientes y las columnas $j_1, \ldots, j_p$ de la matriz A son linealmente independientes.

Demostración. Sólo demostremos la afirmación acerca de los renglones. Razonando por contradicción supongamos que los renglones $A_{i_1,*}, \ldots, A_{i_p,*}$ son linealmente dependientes. Entonces, por el Lema 2, en la submatriz $C = A_{*,\{j_1,\ldots,j_p\}}$ los renglones $i_1, \ldots, i_p$ también son linealmente dependientes. En otras palabras, los renglones de la submatriz $B = A_{\{i_1,\ldots,i_p\},\{j_1,\ldots,j_p\}}$ son linealmente dependientes. Pero en este caso la matriz B no es invertible, su determinante es cero y obtenemos una contradicción pues

$$\det(B) = M_A \begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_p \\ j_1, \ldots, j_p \end{pmatrix}. \qquad \square$$

7. Teorema (rango y menores de una matriz). Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ una matriz. Denotemos por r su rango: $r \coloneqq \mathrm{r}(A)$. Entonces en A existe un menor no nulo de órden r, y todos los menores de órdenes $> r$, si los hay, son nulos.

Demostración. 1. Para la primera parte usamos el Lema 5.

2. Consideremos un menor de orden $p > r$ que está en la intersección de los renglones $i_1, \ldots, i_p$ y las columnas $j_1, \ldots, j_p$. Como $p > \mathrm{r}(A)$, los renglones $i_1, \ldots, i_p$ son linealmente dependientes. por el Lema 6 concluimos que

$$M_A \begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_p \\ j_1, \ldots, j_p \end{pmatrix} = 0. \qquad \square$$