# Polinomio mínimo de una matriz de Jordan. Cálculo del polinomio mínimo si se sabe la forma canónica de Jordan

**Objetivos.** Aprender como se calcula el polinomio mínimo de una matriz de Jordan. Aprender como se calcula el polinomio mínimo de una transformación lineal o de una matriz si se sabe su forma canónica de Jordan.

**Requisitos.** Matriz de Jordan, polinomio mínimo.

**1. Observación (polinomio característico y espectro de una matriz de Jordan).** Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ una matriz de Jordan:

$$A = \operatorname{diag}\big(J_{m_1}(\lambda_1), \ldots, J_{m_k}(\lambda_k)\big),$$

donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$, algunos de los $\lambda_j$ pueden ser iguales. Como $A$ es una matriz triangular superior, su polinomio característico y su espectro están determinados por los elementos diagonales de $A$ de la siguiente manera:

$$\mathrm{C}_A(x) = \prod_{j=1}^{k} (x - \lambda_j)^{m_j}, \qquad \operatorname{sp}(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}.$$

Formalmente, si $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_q\}$, donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ son diferentes por pares, entonces

$$\mathrm{C}_A(x) = \prod_{i=1}^{q} (x - \alpha_i)^{s_i},$$

donde

$$s_i = \sum_{\substack{1 \le j \le k \\ \lambda_j = \alpha_i}} m_j.$$

**2. Proposición (polinomio mínimo de una matriz de Jordan).** Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ una matriz de Jordan:

$$A = \operatorname{diag}\big(J_{m_1}(\lambda_1), \ldots, J_{m_k}(\lambda_k)\big),$$

donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$, algunos de los $\lambda_j$ pueden ser iguales.

Entonces el polinomio mínimo de $A$ es el producto de factores lineales correspondientes a los elementos diagonales de $A$, y el exponente del factor $(x - \alpha)$ es igual al tamaño máximo de los bloques de Jordan con elemento diagonal $\mu$.

Formalmente, si $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_q\}$, donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ son diferentes por pares, entonces

$$\mu_A(x) = \prod_{i=1}^{q} (x - \alpha_i)^{p_i},$$

donde

$$p_i = \max\{m_j \colon j \in \{1, \ldots, k\},\ \lambda_j = \alpha_i\}.$$

*Idea de la demostración.* Sabemos el valor de un polinomio en una matriz diagonal por bloques se calcula por bloques. Para que un polinomio anule el bloque $J_{m_j}(\lambda_j)$, es necesario y suficiente que contenga el factor $(x - \lambda_j)$ con un exponente $\geq m_j$. Por lo tanto el polinomio

$$\prod_{i=1}^{q} (x - \alpha_i)^{p_i}$$

anula la matriz $A$ y tiene grado mínimo entre todos los polinomios que la anulan. $\square$

**3. Ejemplo.** Sea

$$A = \operatorname{diag}\big(J_2(-4), J_3(-4), J_3(-4), J_2(\mathrm{i}), J_2(\mathrm{i}), J_1(7), J_1(7)\big).$$

Entonces $\operatorname{sp}(A) = \{-4, \mathrm{i}, 7\}$,

$$\mathrm{C}_A(x) = (x+4)^8(x-\mathrm{i})^4(x-7)^2, \qquad \mu_A(x) = (x+4)^3(x-\mathrm{i})^2(x-7).$$

**4. Cálculo del polinomio mínimo de una transformación lineal si se sabe su FCJ.** El polinomio mínimo de una transformación lineal coincide con el polinomio mínimo de su matriz asociada con respecto a cualquier base. Por lo tanto, si $C$ es una FCJ de una transformación lineal $T$, $\mu_T$ se puede calcular facilmente como $\mu_C$.

**5. Cálculo del polinomio mínimo de una matriz si se sabe su FCJ.** Matrices similares tienen el mismo polinomio mínimo. Por lo tanto, si $C$ es una FCJ de una matriz $A$, entonces $\mu_A = \mu_C$.