Estructura del producto de matrices

Ejercicios

Objetivos. Comprender cómo están relacionados los renglones y columnas del producto de matrices con los renglones y columnas de los factores.

Requisitos. Definición del producto de matrices, notación breve para matrices.

Notación para entradas, renglones y columnas de matrices

Notación. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

- Si $i \in \{1,\ldots,m\}$ y $j \in \{1,\ldots,n\}$, entonces denotamos por $A_{i,j}$ a la entrada ubicada en el i-ésimo renglón y la j-ésima columna de la matriz A.
- Si $i \in \{1,\ldots,m\}$, entonces denotamos por $A_{i,*}$ al i-ésimo renglón de la matriz A.
- Si $j \in \{1,\ldots,n\}$, entonce denotamos por $A_{*,j}$ a la j-ésima columna de la matriz A.

Comentario: el asterisco $*$ significa "todos". La notación $A_{i,*}$ significa que de la matriz A sacamos todas las entradas cuyo primer índice es i y el segundo índice recorre *todos los valores posibles*. Esta notación o sus análogos se usan en varios lenguajes de programación que trabajan con matrices, incluso MATLAB (MathWorks) y Mathematica (Wolfram Research):

en MATLAB: `A(i, :);` en Mathematica: `A[[i, All]]`.

1. Sea
$$A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 5 & 8 \\ -1 & 4 & -2 & -4 \\ -9 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Escriba las entradas indicadas de la matriz A:
$$A_{2,4} = -4, \qquad A_{3,1} = \underbrace{\qquad}_{?}, \qquad A_{1,1} = \underbrace{\qquad}_{?}.$$

Saque los siguientes renglones de la matriz A:
$$A_{3,*} = \begin{bmatrix} -9 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_{1,*} = \begin{bmatrix} \qquad\qquad\qquad\qquad \end{bmatrix},$$

Escriba las siguientes columnas de la matriz A:
$$A_{*,2} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad A_{*,4} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}.$$

2. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -4 & -7 \\ 0 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Encuentre las siguientes entradas en la matriz A:

$$5 = A_{3,2} = A_{4,1}, \qquad -7 = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}, \qquad 6 = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}.$$

Encuentre los siguientes renglones en la matriz A:

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 \end{bmatrix} = A_{3,*}, \qquad \begin{bmatrix} 6 & -2 \end{bmatrix} = \underbrace{\qquad}_{?}, \qquad \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix} = \underbrace{\qquad}_{?}.$$

Escriba la notación para las siguientes columnas de la matriz A:

$$\begin{bmatrix} -2 \\ -7 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = A_{*,2}, \qquad \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \underbrace{\qquad}_{?}.$$

3. Sea $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ la matriz que consta de las siguientes columnas:

$$A_{*,1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad A_{*,2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad A_{*,3} = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Recupere la matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} \qquad\qquad\qquad \\ \\ \end{bmatrix}.$$

4. Sea $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ la matriz con renglones dados:

$$A_{1,*} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \end{bmatrix}, \qquad A_{2,*} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Escriba las columnas de la matriz A:

$$A_{*,1} = \begin{bmatrix} \qquad \\ \\ \end{bmatrix}, \qquad A_{*,2} = \begin{bmatrix} \qquad \\ \\ \end{bmatrix}.$$

Columnas del producto de matrices

En los ejercicios de esta página trabajamos con las siguientes dos matrices:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}.$$

5. Calcule el producto AB:

$$AB = \left[\begin{array}{c|c} -18 - 25 & \\ \hline & \\ \hline & \end{array}\right] = \begin{bmatrix} -43 & \\ & \\ & \end{bmatrix}.$$

6. Escriba por separado las columnas de la matriz AB:

$$(AB)_{*,1} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \qquad (AB)_{*,2} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}.$$

7. Calcule el producto de la matriz A por la primera columna de la matriz B:

$$AB_{*,1} = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 - 5 \\ \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}.$$

8. Calcule el producto de la matriz A por la segunda columna de la matriz B:

$$AB_{*,2} = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}.$$

9. Compare los resultados de los cálculos y escriba el resumen:

$$(AB)_{*,1} = \underbrace{\qquad\qquad}_{?} \qquad\qquad (AB)_{*,2} = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}$$

Ahora consideremos otro ejemplo. Sean $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ y $B \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ matrices con entradas generales:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & B_{2,3} \\ B_{3,1} & B_{3,2} & B_{3,3} \end{bmatrix}.$$

10. Calcule el producto AB:

$$AB = \left[\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline & & \end{array}\right].$$

11. Escriba la segunda columna de la matriz AB:

$$(AB)_{*,2} = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}.$$

12. Calcule el producto de la matriz A por la segunda columna de la matriz B:

$$AB_{*,2} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}.$$

13. Compare los resultados:

$$\underbrace{}_{?} = \underbrace{}_{?}$$

14. Escriba la fórmula general:

$$(AB)_{*,j} = \underbrace{}_{?}$$

15. Escriba la misma regla general con palabras:

la j-ésima columna del producto AB es igual

al producto de $\underbrace{}_{?}$

por $\underbrace{}_{?}$ de la matriz $\underbrace{}_{?}$

Renglones del producto de matrices

Sean

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -7 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}.$$

16. Calcule el producto AB:

$$AB = \left[\begin{array}{c|c|c} \quad 8-6 \quad & \qquad\qquad & \qquad\qquad \\ \hline & & \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 2 & \qquad & \qquad \\ & & \end{bmatrix}.$$

17. Escriba por separado los renglones de la matriz AB:

$$(AB)_{1,*} = \begin{bmatrix} \qquad\qquad\qquad \end{bmatrix},$$

$$(AB)_{2,*} = \begin{bmatrix} \qquad\qquad\qquad \end{bmatrix}.$$

18. Multiplique el primer renglón de la matriz A por la matriz B:

$$A_{1,*}B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -7 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \qquad & 4+10 & \qquad \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \quad & 14 & \quad \end{bmatrix},$$

19. Multiplique el segundo renglón de la matriz A por la matriz B:

$$A_{2,*}B = \begin{bmatrix} \qquad\qquad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -7 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \qquad\qquad\qquad \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \qquad\qquad \end{bmatrix},$$

20. Compare los resultados:

$$(AB)_{1,*} = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}, \qquad (AB)_{2,*} = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}.$$

Consideremos otro ejemplo. Sean $A \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ y $B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dos matrices con entradas generales:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \\ A_{3,1} & A_{3,2} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{bmatrix}.$$

21. Calcule el producto AB:

$$AB = \left[\begin{array}{c|c} \qquad\qquad & \qquad\qquad \\ \hline & \\ \hline & \end{array}\right].$$

22. Escriba el tercer renglón del producto AB:

$$(AB)_{3,*} = \begin{bmatrix} \qquad\qquad\qquad\qquad \end{bmatrix}.$$

23. Multiplique el tercer renglón de la matriz A por la matriz B:

$$A_{3,*}B = \begin{bmatrix} \qquad\qquad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \qquad\qquad\qquad\qquad \end{bmatrix}.$$

24. Compare los resultados:

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{?} = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}$$

25. Escriba la fórmula general:

$$(AB)_{i,*} = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}$$

26. Escriba el resumen con palabras:

el i-ésimo renglón del producto AB es igual al producto

del $\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}$

por $\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}$