Estructura del producto de matrices

Objetivos. Comprender cómo están relacionados los renglones y columnas del producto de matrices con los renglones y columnas de los factores.

Requisitos. Definición del producto de matrices, notación breve para matrices.

Notación para entradas, renglones y columnas de matrices

1. Ejemplo. Sea A la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & -4 & -1 \\ 7 & 6 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Entonces usamos la notación $A_{2,*}$ para el segundo renglón de A y la notación $A_{*,3}$ para la tercera columna de A:

$$A_{2,*} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -4 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_{*,3} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

2. Notación. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$.

- Si $i \in \{1, \ldots, m\}$ y $j \in \{1, \ldots, n\}$, entonces denotamos por $A_{i,j}$ a la entrada ubicada en el i-ésimo renglón y la j-ésima columna de la matriz A.
- Si $i \in \{1, \ldots, m\}$, entonces denotamos por $A_{i,*}$ al i-ésimo renglón de la matriz A.
- Si $j \in \{1, \ldots, n\}$, entonce denotamos por $A_{*,j}$ a la j-ésima columna de la matriz A.

3. Comentario: el asterisco $*$ significa "todos". La notación $A_{i,*}$ significa que de la matriz A sacamos todas las entradas cuyo primer índice es i y el segundo índice recorre *todos los valores posibles*. Esta notación o sus análogos se usan en varios lenguajes de programación que trabajan con matrices, incluso MATLAB (MathWorks) y Mathematica (Wolfram Research):

en MATLAB: `A(i, :);` en Mathematica: `A[[i, All]]`.

4. Proposición (renglones del producto de dos matrices). Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{F})$, $i \in \{1,\ldots,m\}$. Entonces

$$(AB)_{i,*} = A_{i,*}B,$$

esto es, el i-ésimo renglón del producto de dos matrices es igual al producto del i-ésimo renglón de la primera matriz por la segunda matriz.

Demostración. La fórmula se sigue directamente de las definiciones. Primero notamos que ambos lados de la fórmula son matrices de tamaño $1 \times p$. Luego mostramos que para cada $j \in \{1,\ldots,p\}$ la entrada $(1,j)$ de la matriz $(AB)_{i,*}$ coincide con la entrada $(1,j)$ de la matriz $A_{i,*}B$. Aplicamos la definición del i-ésimo renglón y la definición del producto:

$$((AB)_{i,*})_{1,j} = (AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}B_{k,j};$$

$$(A_{i,*}B)_{1,j} = \sum_{k=1}^{n}((A_{i,*})_{1,k}B_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}B_{k,j}. \qquad \square$$

5. Proposición (columnas del producto de dos matrices). Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{F})$, $j \in \{1,\ldots,p\}$. Entonces

$$(AB)_{*,j} = AB_{*,j},$$

esto es, la j-ésima columna del producto de dos matrices es igual al producto de la primera matriz por la j-ésima columna de la segunda matriz.

6. Ejercicio. Demuestre la Proposición 5.

7. Ejercicio. Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{F})$. Determine qué pasa con el producto AB si:

- el i-ésimo renglón de A se multiplica por un escalar λ;
- los renglones r y s de A se intercambian de lugares;
- la j-ésima columna de B se multiplica por un escalar λ;
- las columnas r y s de B se intercambian de lugares.