Potencias enteras no negativas de matrices cuadradas

Ejercicios

Objetivos. Aprender cómo se pueden calcular las potencias enteras no negativas de algunas matrices cuadradas.

Requisitos. Multiplicación de matrices, el método de inducción matemática.

1. Definiciones explícitas de A^2, A^3 y A^4. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Entonces

$$A^2 = \underbrace{\qquad}_{?}, \qquad\qquad A^3 = AAA, \qquad\qquad A^4 = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}.$$

2. Definición informal de A^p. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Escriba la definición informal de A^p, donde $p \in \{1, 2, \ldots\}$:

$$A^p = \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}$$

3. Definición de A^0. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Entonces $\quad A^0 = \underbrace{\qquad}_{?}.$

Gracias a esta definición de A^0, tenemos que

$$A^p A^0 = \underbrace{\qquad}_{?}.$$

4. Definición recursiva de A^p. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Para todo $p \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, la matriz A^{p+1} se define a través de A^p de la siguiente manera:

$$A^{p+1} = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}$$

Ejemplo: Potencias de un bloque de Jordan de orden 2

Ejemplo. Vamos a calcular A^p, donde A es la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Esta matriz se llama *bloque de Jordan de orden* 2. Aquí λ es un parámetro.

5. Calcule A^2:

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \qquad & \qquad \\ \hline \qquad & \qquad \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \qquad & \qquad \\ \qquad & \qquad \end{bmatrix}.$$

6. Calcule A^3 usando el resultado del ejercicio anterior:

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} \qquad & \qquad \\ \qquad & \qquad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \qquad & \qquad \\ \hline \qquad & \qquad \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \qquad & \qquad \\ \qquad & \qquad \end{bmatrix}.$$

7. Calcule A^4 usando el resultado del ejercicio anterior:

$$A^4 = A^3 A = \begin{bmatrix} \qquad & \qquad \\ \qquad & \qquad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \qquad & \qquad \\ \hline \qquad & \qquad \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \qquad & \qquad \\ \qquad & \qquad \end{bmatrix}.$$

8. Observando los resultados de los ejercicios anteriores se puede adivinar la fórmula general:

$$A^p = \begin{bmatrix} \qquad & \qquad \\ \qquad & \qquad \end{bmatrix}.$$

9. Denotemos por R_p al lado derecho de la última fórmula:

$$R_p = \begin{bmatrix} \qquad & \qquad \\ \qquad & \qquad \end{bmatrix}.$$

Vamos a demostrar que $A^p = R_p$ para todo $p \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

10. Base de inducción. Demostremos que $A^0 = P_0$. Por la definición de A^0,

$$A^0 = I_2 = \begin{bmatrix} \qquad & \qquad \\ \qquad & \qquad \end{bmatrix}.$$

Por otro lado, en la fórmula para R_p ponemos $p = 0$:

$$R_0 = \begin{bmatrix} \qquad & \qquad \\ \qquad & \qquad \end{bmatrix}.$$

Resumen: $A^0 = R_0$.

11. Paso de inducción. Supongamos que $A^p = R_p$ y demostremos que $A^{p+1} = R_{p+1}$.

$$A^{p+1} \overset{\text{(i)}}{=\!=} A^p A \overset{\text{(ii)}}{=\!=} R_p A = \begin{bmatrix} \qquad & \qquad \\ \qquad & \qquad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \qquad & \qquad \\ \qquad & \qquad \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \qquad\qquad & \qquad\qquad \\ \qquad\qquad & \qquad\qquad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \qquad & \qquad \\ \qquad & \qquad \end{bmatrix}.$$

En la igualdad (i) aplicamos la definición recursiva de las potencias de una matriz, en la igualdad (ii) usamos la hipótesis de la inducción: $A^p = R_p$. La última matriz coincide con R_{p+1}. La demostración está completa.

Potencias de la matriz de rotación

Ejemplo. Vamos a calcular R_α^p, donde R_α es la siguiente matriz llamada *matriz de rotación*:

$$R_\alpha = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\operatorname{sen}(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}.$$

Aquí α es un parámetro. Luego (en el tema "Transformaciones lineales") vamos a ver que la matriz R_α corresponde a la rotación del plano en el ángulo α.

12. Coseno y seno de la suma (repaso). Recuerde las fórmulas trigonométricas:

$$\cos(\alpha+\beta) =$$

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) =$$

13. Producto de matrices de rotación. Consideremos dos matrices de rotación:

$$R_\alpha = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\operatorname{sen}(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}, \qquad R_\beta = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\operatorname{sen}(\beta) \\ \operatorname{sen}(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix}.$$

Calcule su producto $R_\alpha R_\beta$:

$$R_\alpha R_\beta = \left[\begin{array}{c|c} \qquad\qquad & \qquad\qquad \\ \hline \qquad\qquad & \qquad\qquad \end{array}\right].$$

Simplifique el resultado usando fórmulas trigonométricas:

$$R_\alpha R_\beta = \begin{bmatrix} \qquad & \qquad \\ \qquad & \qquad \end{bmatrix} = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}.$$

14. Potencias de la matriz de rotación. Usando la fórmula obtenida en el ejercicio anterior calcule los siguientes productos:

$$R_\alpha^2 = R_\alpha R_\alpha = \underbrace{\qquad\qquad}_{?},$$

$$R_\alpha^3 = R_\alpha^2 R_\alpha = \underbrace{\qquad\qquad}_{?} R_\alpha = \underbrace{\qquad\qquad}_{?},$$

$$R_\alpha^4 = R_\alpha^3 R_\alpha = \underbrace{\qquad\qquad}_{?} R_\alpha = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}.$$

Adivine la fórmula general:

$$R_\alpha^p = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}$$

La demostración formal se puede llevar a cabo por inducción.