Potencias enteras no negativas de una matriz cuadrada

Objetivos. Definir potencias enteras no negativas de una matriz cuadrada, ver que las potencias de una matriz conmutan entre si.

Requisitos. Multiplicación de matrices, propiedades de la multiplicación de matrices, matriz identidad, demostraciones por inducción, definición por inducción (definición recursiva).

1. Definición (potencias enteras no negativas de una matriz cuadrada). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ una matriz cuadrada. Las *potencias* de A se definen de manera recursiva:

$$\forall p \in \{0, 1, 2, \ldots\} \qquad A^{p+1} \coloneqq A^p A,$$

con la condición inicial $A^0 \coloneqq I_n$.

2. Ejemplo. Si A es una matriz cuadrada, entonces

$$A^4 = A^3 A = (A^2 A)A = \big((A^1 A)A\big)A = \big((AA)A\big)A.$$

La multiplicación de matrices cumple con la ley asociativa, por eso no es necesario poner paréntesis:

$$A^4 = AAAA.$$

3. Ejemplo. Calculemos A^2, donde

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solución falsa. Elevamos cada entrada de la matriz A al cuadrado:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 5^2 & (-1)^2 \\ 2^2 & 1^2 \end{bmatrix}.$$

¿Por qué esta solución es falsa?. Porque el producto de matrices y la potencia de una matriz *no se calculan entrada por entrada*, la definición del producto de matrices es más complicada. $\square$

Solución correcta. Por definición,

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25-2 & -5-1 \\ 10+2 & -2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & -6 \\ 12 & -1 \end{bmatrix}. \qquad \square$$

4. Ejemplo. Sea
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$
Calculemos $A^3 = A \cdot A \cdot A$ de dos maneras diferentes: A^2A y AA^2.

Solución.
$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9-4 & -12-20 \\ 3+5 & -4+25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -32 \\ 8 & 21 \end{bmatrix};$$
$$A^2A = \begin{bmatrix} 5 & -32 \\ 8 & 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15-32 & -20-160 \\ 24+21 & -32+105 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17 & -180 \\ 45 & 73 \end{bmatrix};$$
$$AA^2 = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -32 \\ 8 & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15-32 & -96-84 \\ 5+40 & -32+105 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17 & -180 \\ 45 & 73 \end{bmatrix}. \qquad \square$$

5. Tarea adicional simple. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Usando un razonamiento por inducción, demuestre que $A^{p+1} = A \cdot A^p$ para todo $p \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.

6. Propiedades de las potencias (sin demostración).

1. $A^pA^q = A^{p+q}$.
2. $(A^p)^q = A^{pq}$.

7. Tarea adicional. Demuestre por inducción las propiedades enunciadas arriba. Hay que fijar un p arbitrario y hacer la inducción matemática sobre q.

8. Observación. Como sabemos, la ley conmutativa no es válida para las matrices en general. Pero *las potencias de una matriz cuadrada siempre conmutan entre sí*. Es una consecuencia de la ley *asociativa*.

9. Observación (exponenciación binaria). Para calcular A^p no es necesario hacer $p-1$ productos de matrices. Agrupando los factores del producto $\underbrace{A \cdots A}_{p \text{ factores}}$ en potencias de 2 uno puede ahorrar el número de multiplicaciones. Por ejemplo, la potencia A^{13} se puede calcular con 5 multiplicaciones de matrices:
$$A^2 = AA, \qquad A^4 = A^2A^2, \qquad A^8 = A^4A^4, \qquad A^{12} = A^8A^4, \qquad A^{13} = A^{12}A.$$
Generalizando esta idea se puede deducir un algoritmo llamado la *exponenciación binaria*.

10. Observación (acerca de la potencia del producto de dos matrices). A diferencia de los números, para las matrices *no se cumple* (en general) la fórmula $(AB)^n = A^nB^n$. Es que la multiplicación de matrices no es conmutativa y, por ejemplo, $(AB)^2 = ABAB$ no es lo mismo que $A^2B^2 = AABB$.

11. Ejercicio. Dé un ejemplo de matrices $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tales que $(AB)^2 \neq A^2B^2$.

12. Tarea adicional simple. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ tales que $AB = BA$. Demuestre por inducción que
$$\forall p \in \{0, 1, 2, \ldots\} \qquad (AB)^p = A^pB^p.$$

Deducción de fórmulas para las potencias de algunas matrices

En general, no tenemos fórmulas sencillas para calcular la p-ésima potencia de una matriz. Hay fórmulas basadas en la *forma canónica de Jordan* y el *polinomio mínimo* que se estudian en el curso de Álgebra III. Pero hay matrices A para las cuales A^p se puede escribir con una fórmula simple. Vamos a conocer algunos de estos ejemplos.

13. Ejemplo. Calculemos A^p, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solución. Primero calculemos A^2 y A^3:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Parece que

$$A^p = \begin{bmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Demostremos por inducción que la fórmula (1) se cumple para todo $p \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Denotemos por $B(p)$ al lado derecho de esta fórmula:

$$B(p) := \begin{bmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Primero hay que probar la *base de inducción*. Como p empieza con 0, hay que probar que la fórmula (1) se cumple para $p = 0$:

$$A^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = B(0). \qquad \checkmark$$

Ahora supongamos que $A^p = B(p)$ (es nuestra *hipótesis de inducción*) y demostremos la igualdad $A^{p+1} = B(p+1)$.

$$A^{p+1} \overset{\text{(i)}}{=\!=} A^p A \overset{\text{(ii)}}{=\!=} \begin{bmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\text{(iii)}}{=\!=} \begin{bmatrix} 1 & p+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\text{(iv)}}{=\!=} B(p+1). \qquad \checkmark$$

En el paso (i) aplicamos la definición (recursiva) de la potencia, y en el paso (ii) usamos la hipótesis de la inducción. La igualdad (iii) obtenemos con un cálculo directo, usando la definición del producto de matrices, y en la igualdad (iv) se usa la definición de $B(p)$. Así acabamos de demostrar que $A^{p+1} = B(p+1)$, usando la hipótesis que $A^p = B(p)$. Ahora el principio de inducción garantiza que la igualdad $A^{p+1} = B(p+1)$ se cumple para todo p entero no negativo. $\square$

Ejercicios

En los siguientes ejercicios hay que calcular algunas primeras potencias de A y adivinar un fórmula general para A^p. También puede demostrar esta fórmula por inducción.

14. $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}.$

15. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}.$ En este ejemplo divida la respuesta en 4 casos: $p = 4k, \quad p = 4k+1, \quad p = 4k+2, \quad p = 4k+3.$

16. $A = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}.$

17. Definición (la matriz de rotación del plano al ángulo $\boldsymbol{\alpha}$). Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. La *matriz de rotación del plano* asociada al ángulo α es

$$R_\alpha := \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\operatorname{sen}(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}.$$

Más adelante, en la unidad "Transformaciones lineales", vamos a comprender el sentido geométrico de la matriz R_α. Ahora estudiaremos un par de sus propiedades algebraicas.

18. Producto de dos matrices de rotación. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Calcule el producto $R_\alpha R_\beta$. Hay que aplicar la definición del producto de matrices, simplificar el resultado con fórmulas trigonométricas apropiadas y comprender cómo escribirlo de manera breve.

19. Potencias de una matriz de rotación. Escriba y demuestre por inducción una fórmula para R_α^p. Use el resultado del ejercicio anterior.

En los siguientes dos ejercicios hay que calcular las primeras potencias de A, adivinar una fórmula general para A^p y demostrarla por inducción.

20. $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$

21. $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$ En este ejercicio lo más interesante es encontrar la fórmula correcta para la entrada $(A^p)_{1,3}$.

22. Ejercicio. Construya una matriz cuadrada A tal que $A \neq \mathbf{0}$ y $A^2 = \mathbf{0}$.

23. Tarea adicional. Dado un entero positivo p, construya una matriz cuadrada A tal que $A^{p-1} \neq \mathbf{0}$ y $A^p = \mathbf{0}$.