Motivación de la definición de las operaciones con matrices

Ejercicios

Objetivos. Comprender por medio de ejemplos cómo surgen las definiciones de operaciones con matrices, en particular, cuál es el sentido del producto de matrices.

Requisitos. Operaciones lineales en $\mathbb{R}^n$, matrices definidas por medio de fórmulas, composición de funciones.

Matrices son tablas de coeficientes de transformaciones lineales

Ejemplo. Consideremos la función $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente regla:

$$f(x) = \begin{bmatrix} 4x_1 - 5x_2 + x_3 \\ 7x_1 - 2x_3 \end{bmatrix}, \qquad \text{esto es,} \qquad f\colon \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 4x_1 - 5x_2 + x_3 \\ 7x_1 - 2x_3 \end{bmatrix}.$$

La función f es una *transformación lineal*. Ahora no vamos a explicar el significado exacto de este término. Lo importante para nosotros es que cada entrada del vector $f(x)$ es una combinación lineal de las variables x_1, x_2, x_3, es decir, una suma de las variables x_1, x_2, x_3 multiplicadas por ciertos coeficientes. Asociamos a la función f la matriz de estos coeficientes:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 7 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

1. Escriba la matriz asociada a la siguiente transformación lineal $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$:

$$f(x) = \begin{bmatrix} 5x_1 - 3x_2 \\ 4x_2 \\ 7x_1 + x_2 \\ -x_1 + 6x_2 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}.$$

2. Dada la matriz A,

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -8 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 6 & 2 \end{bmatrix},$$

escriba la transformación lineal asociada a la matriz A:

$$f\colon \underbrace{\qquad}_{\mathbb{R}^?} \to \underbrace{\qquad}_{\mathbb{R}^?} \qquad\qquad f(x) = \begin{bmatrix} \qquad\qquad\qquad\qquad \\ \\ \end{bmatrix}.$$

Matriz asociada a la suma de transformaciones lineales

Sea $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & B_{2,3} \end{bmatrix}.$$

3. Denotemos por f y g a las transformaciones lineales asociadas a las matrices A y B:

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \qquad g\colon \underbrace{\qquad}_{\mathbb{R}^?} \to \underbrace{\qquad}_{\mathbb{R}^?},$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} \qquad\qquad\qquad\qquad \\ \\ \end{bmatrix}, \qquad g(x) = \begin{bmatrix} \qquad\qquad\qquad\qquad \\ \\ \end{bmatrix}.$$

4. Calcule la suma de las funciones f y g:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \begin{bmatrix} \Big(\qquad\qquad\qquad \Big) + \Big(\qquad\qquad\qquad \Big) \\ \Big(\qquad\qquad\qquad \Big) + \Big(\qquad\qquad\qquad \Big) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (\qquad\quad)x_1 + (\qquad\quad)x_2 + (\qquad\quad)x_3 \\ (\qquad\quad)x_1 + (\qquad\quad)x_2 + (\qquad\quad)x_3 \end{bmatrix}.$$

5. Escriba la matriz asociada a la función $f+g$:

$$C = \begin{bmatrix} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \\ \\ \end{bmatrix}.$$

Resumen. La suma de las matrices corresponde a la suma de transformaciones lineales.

Matriz asociada al producto de una transformación lineal por un escalar

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y sea $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \end{bmatrix}.$$

6. Denotemos por f a la transformación lineal asociada a la matriz A:

$$f\colon \underbrace{\qquad}_{\mathbb{R}^?} \to \underbrace{\qquad}_{\mathbb{R}^?},$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} \qquad\qquad\qquad \\ \\ \end{bmatrix}.$$

7. Calcule el producto de la función f por el escalar λ:

$$(\lambda f)(x) \coloneqq \lambda f(x) = \begin{bmatrix} \lambda\Big(\qquad\qquad\qquad \Big) \\ \lambda\Big(\qquad\qquad\qquad \Big) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (\qquad)x_1 + (\qquad)x_2 + (\qquad)x_3 \\ \\ (\qquad)x_1 + (\qquad)x_2 + (\qquad)x_3 \end{bmatrix}.$$

8. Escriba la matriz asociada a la función λf:

$$B = \begin{bmatrix} \qquad\qquad\qquad \\ \\ \end{bmatrix}.$$

9. Escriba el resumen.

Matriz asociada a la composición de transformaciones lineales

Sea $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ y sea $B \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \qquad & \qquad \\ \qquad & \qquad \\ \qquad & \qquad \end{bmatrix}.$$

10. Sean $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal asociada con la matriz A y sea $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal asociada con la matriz B:

$$f(y) = \begin{bmatrix} A_{1,1}y_1 + A_{1,2}y_2 + A_{1,3}y_3 \\ \qquad \end{bmatrix}, \qquad g(x) = \begin{bmatrix} B_{1,1}x_1 + B_{1,2}x_2 \\ \qquad \\ \qquad \end{bmatrix}.$$

Calcule la función compuesta $f \circ g$. Para hacerlo sustituya cada variable y_i en la definición de $f(y)$ por la i-ésima componente de la columna $g(x)$:

$$(f \circ g)(x) = \begin{bmatrix} A_{1,1}(B_{1,1}x_1 + B_{1,2}x_2) + \qquad\qquad + \qquad\qquad \\ \qquad \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \big(A_{1,1}B_{1,1} + \qquad\qquad\big)x_1 + \big(A_{1,1}B_{1,2} + \qquad\qquad\big)x_2 \\ \qquad \end{bmatrix}.$$

La matriz de coeficientes es

$$C = \begin{bmatrix} \qquad & \qquad \\ \qquad & \qquad \end{bmatrix}.$$

La matriz C es el producto AB.

11. Escriba el resumen.