Motivación de las operaciones con matrices

Objetivos. Motivar la introducción del concepto de una matriz y la definición de la multiplicación de matrices.

Requisitos. $\mathbb{R}^n$, función (aplicación).

1. Las matrices sirven para describir transformaciones lineales. Consideremos un ejemplo. Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la función (aplicación, mapeo) definida mediante las siguientes fórmulas:

$$f\colon \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

donde

$$y_1 = 3x_1 - x_2 + 5x_3, \qquad y_2 = x_1 - 4x_3.$$

En otras palabras,

$$f\colon \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 3x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 \\ x_1 & & & - & 4x_3 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Las funciones de esta forma son muy comunes en ciencias naturales y en todas las áreas de matemáticas. Para definir una función de este tipo, es suficiente sólo escribir la tabla de los coeficientes:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Se dice que la tabla (2) es la *matriz* de la *transformación lineal* (1). Las matrices son tablas de números que sirven como coeficientes de transformaciones lineales. Nosotros empezamos a estudiar las matrices. A mitades del curso Álgebra II vamos a estudiar las transformaciones lineales en espacios vectoriales de dimensiones finitas y ver que estas siempre se pueden describir con matrices.

2. Suma de dos transformaciones lineales. Sean $f, g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ las siguientes funciones:

$$f\colon \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} A_{1,1}x_1 + A_{1,2}x_2 + A_{1,3}x_3 \\ A_{2,1}x_1 + A_{2,2}x_2 + A_{2,3}x_3 \end{bmatrix},$$

$$g\colon \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} B_{1,1}x_1 + B_{1,2}x_2 + B_{1,3}x_3 \\ B_{2,1}x_1 + B_{2,2}x_2 + B_{2,3}x_3 \end{bmatrix}.$$

Entonces la función $f+g$ definida como $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, actúa mediante la siguiente regla:

$$f+g\colon \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} (A_{1,1}+B_{1,1})x_1 + (A_{1,2}+B_{1,2})x_2 + (A_{1,3}+B_{1,3})x_3 \\ (A_{2,1}+B_{2,1})x_1 + (A_{2,2}+B_{2,2})x_2 + (A_{2,3}+B_{2,3})x_3 \end{bmatrix}.$$

Por eso la suma de las matrices

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & B_{2,3} \end{bmatrix}$$

se define *entrada por entrada*:

$$A+B \coloneqq \begin{bmatrix} A_{1,1}+B_{1,1} & A_{1,2}+B_{1,2} & A_{1,3}+B_{1,3} \\ A_{2,1}+B_{2,1} & A_{2,2}+B_{2,2} & A_{2,3}+B_{2,3} \end{bmatrix}.$$

Por ejemplo, el elemento de la primera fila y tercera columna de la matriz $A+B$ que denotamos por $(A+B)_{1,3}$ es igual a la suma de los elementos de A y B con los mismos índices $(1,3)$:

$$(A+B)_{1,3} = A_{1,3} + B_{1,3}.$$

3. Ejercicio sencillo. Escriba la fórmula general que expresa $(A+B)_{i,j}$ a través de los elementos de A y B.

4. Producto de una transformación lineal por un escalar. Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la siguiente función:

$$f\colon \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} A_{1,1}x_1 + A_{1,2}x_2 + A_{1,3}x_3 \\ A_{2,1}x_1 + A_{2,2}x_2 + A_{2,3}x_3 \end{bmatrix},$$

y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces la función λf se define como $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ y actúa mediante la siguiente regla:

$$\lambda f\colon \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \lambda A_{1,1}x_1 + \lambda A_{1,2}x_2 + \lambda A_{1,3}x_3 \\ \lambda A_{2,1}x_1 + \lambda A_{2,2}x_2 + \lambda A_{2,3}x_3 \end{bmatrix}.$$

Por eso el producto λ por A se define entrada por entrada:

$$\lambda A \coloneqq \begin{bmatrix} \lambda A_{1,1} & \lambda A_{1,2} & \lambda A_{1,3} \\ \lambda A_{2,1} & \lambda A_{2,2} & \lambda A_{2,3} \end{bmatrix}.$$

5. Composición de dos transformaciones lineales. Sean $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ las siguientes funciones:

$$g\colon \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{1,1}x_1 + B_{1,2}x_2 \\ B_{2,1}x_1 + B_{2,2}x_2 \\ B_{3,1}x_1 + B_{3,2}x_2 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

$$f\colon \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,1}y_1 + A_{1,2}y_2 + A_{1,3}y_3 \\ A_{2,1}y_1 + A_{2,2}y_2 + A_{2,3}y_3 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Consideremos la composición $f \circ g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Sustituimos las fórmulas (3) para y_1, y_2 en (4), expandimos y reagrupamos:

$$\begin{aligned} z_1 &= A_{1,1}(B_{1,1}x_1 + B_{1,2}x_2) + A_{1,2}(B_{2,1}x_1 + B_{2,2}x_2) + A_{1,3}(B_{3,1}x_1 + B_{3,2}x_2) \\ &= (A_{1,1}B_{1,1} + A_{1,2}B_{2,1} + A_{1,3}B_{3,1})x_1 + (A_{1,1}B_{1,2} + A_{1,2}B_{2,2} + A_{1,3}B_{3,2})x_2; \\ z_2 &= A_{2,1}(B_{1,1}x_1 + B_{1,2}x_2) + A_{2,2}(B_{2,1}x_1 + B_{2,2}x_2) + A_{2,3}(B_{3,1}x_1 + B_{3,2}x_2) \\ &= (A_{2,1}B_{1,1} + A_{2,2}B_{2,1} + A_{2,3}B_{3,1})x_1 + (A_{2,1}B_{1,2} + A_{2,2}B_{2,2} + A_{2,3}B_{3,2})x_2. \end{aligned}$$

Esto significa que

$$f \circ g\colon \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix},$$

donde

$$z_1 = (A_{1,1}B_{1,1} + A_{1,2}B_{2,1} + A_{1,3}B_{3,1})x_1 + (A_{1,1}B_{1,2} + A_{1,2}B_{2,2} + A_{1,3}B_{3,2})x_2;$$

$$z_2 = (A_{2,1}B_{1,1} + A_{2,2}B_{2,1} + A_{2,3}B_{3,1})x_1 + (A_{2,1}B_{1,2} + A_{2,2}B_{2,2} + A_{2,3}B_{3,2})x_2.$$

Por eso el producto de las matrices

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \\ B_{3,1} & B_{3,2} \end{bmatrix}$$

se define mediante la siguiente regla:

$$AB := \begin{bmatrix} A_{1,1}B_{1,1} + A_{1,2}B_{2,1} + A_{1,3}B_{3,1} & A_{1,1}B_{1,2} + A_{1,2}B_{2,2} + A_{1,3}B_{3,2} \\ \\ A_{2,1}B_{1,1} + A_{2,2}B_{2,1} + A_{2,3}B_{3,1} & A_{2,1}B_{1,2} + A_{2,2}B_{2,2} + A_{2,3}B_{3,2} \end{bmatrix}.$$

Es decir, AB es una matriz de tamaño 2×2, su entrada con índices $(1,1)$ es igual a

$$(AB)_{1,1} = A_{1,1}B_{1,1} + A_{1,2}B_{2,1} + A_{1,3}B_{3,1} = \sum_{k=1}^{3} A_{1,k}B_{k,1},$$

su entrada con índices $(1,2)$ es igual a

$$(AB)_{1,2} = A_{1,1}B_{1,2} + A_{1,2}B_{2,2} + A_{1,3}B_{3,2} = \sum_{k=1}^{3} A_{1,k}B_{k,2},$$

etc.

6. Ejercicio importante. Escriba la fórmula general que exprese la entrada $(AB)_{i,j}$ de la matriz AB a través de ciertas entradas de las matrices A y B.

7. Ejercicio. Sean $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$f\colon \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4y_1 - 5y_2 \\ y_1 + 3y_2 \end{bmatrix},$$

$$g\colon \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - 2x_2 + x_3 \\ 3x_1 - 4x_2 - 4x_3 \end{bmatrix}.$$

Escriba la fórmula para la composición $f \circ g$. Verifique cómo funciona la fórmula del ejercicio anterior.