Definición de las operaciones con matrices

Ejercicios

Objetivos. Aprender a hacer las operaciones aritméticas con matrices. Aprender las definiciones formales de operaciones con matrices.

Requisitos. Operaciones lineales en $\mathbb{R}^n$, matrices definidas por medio de fórmulas.

La suma de dos matrices

1. Sean A y B matrices de tamaño $m \times n$ con entradas reales: $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.
Entonces la matriz $A + B$ se define de la siguiente manera:

$$A + B = \left[A_{i,j} + B_{i,j}\right]_{i,j=1}^{m,n}.$$

En otras palabras, la suma de dos matrices se calcula *entrada por entrada*.
La *operación* que convierte A, B en $A + B$ se llama la *adición* de matrices.

2. Por la definición anterior, $A + B$ también es una matriz de tamaño $m \times n$ con entradas reales:

$$A + B \in \underbrace{\qquad\qquad}_{?},$$

y para cada par de índices (i, j) la (i, j)-ésima entrada de la matriz $A + B$ es la suma de las (i, j)-ésimas entradas de las matrices A y B:

$$\forall i \in \{1, \ldots, m\} \qquad \forall j \in \{1, \ldots, n\} \qquad\qquad (A + B)_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}.$$

Observación. En la definición de $A + B$ es importante que las matrices A y B son del mismo tamaño y que las entradas de A y B pertenecen al mismo conjunto $\mathbb{R}$.

3. Ejemplo. Están dadas las matrices $A, B \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$. Calcule su suma $A + B$.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 4 & 1 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 8 & -3 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por definición, $A + B \in \underbrace{\qquad\qquad}_{?}$.

Calculamos cada entrada de la matriz $A+B$ como la suma de las entradas correspondientes de las matrices A y B:

$$A + B = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ & -2 \\ 7 & \end{bmatrix}.$$

El producto de un escalar por una matriz

4. Sea λ un número real y sea A una matriz $m \times n$ con entradas reales:

$$\lambda \in \underbrace{\qquad\quad}_{?} \qquad\qquad \text{y} \qquad\qquad A \in \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}.$$

Entonces la matriz λA se define de la siguiente manera:

$$\lambda A = \Big[\qquad\qquad\qquad \Big]_{i,j=1}^{\;\;,}.$$

En otras palabras, el producto de un escalar por una matriz se calcula *entrada por entrada*. La *operación* que convierte λ, A en λA se llama la *multiplicación de escalares por matrices*.

5. Por la definición anterior,

$$\lambda A \in \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?},$$

y para cada par de índices (i, j) la (i, j)-ésima entrada de la matriz λA es el producto del escalar λ por la (i, j)-ésima entrada de la matriz A:

$$\forall i \in \{1, \ldots, \underbrace{\quad\;}_{?}\} \qquad \forall j \in \{1, \ldots, \underbrace{\quad\;}_{?}\} \qquad\qquad (\lambda A)_{i,j} = \underbrace{\qquad\qquad\;}_{?}.$$

6. Ejemplo. Están dados $\lambda \in \mathbb{R}$ y $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$. Calcule λA.

$$\lambda = -3, \qquad A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 0 & 7 & 5 \end{bmatrix}.$$

Por definición, $\lambda A \in \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}$.

Calculamos cada entrada de λA como el producto del escalar λ por la entrada correspondiente de la matriz A:

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \quad 6 \quad & \qquad & \qquad \\ & & \\ & -21 & \end{bmatrix}.$$

El producto de dos matrices

La suma de matrices y el producto de una matriz por un escalar se calculan entrada por entrada. La definición del producto de matrices es más complicada.

7. Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$. Entonces el producto AB se define de la siguiente manera:

$$AB = \left[\sum_{k=1}^{n} A_{i,k} B_{k,j} \right]_{i,j=1}^{m,p}.$$

Esto significa que

$$AB \in \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?},$$

y cada entrada $(AB)_{i,j}$, donde $i \in \{1, \ldots, \underbrace{\qquad}_{?}\}$, $j \in \{1, \ldots, \underbrace{\qquad}_{?}\}$, se calcula como

$$(AB)_{i,j} = \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

La *operación* que convierte A, B en AB se llama la *multiplicación* de matrices.

8. Determine los tamaños de los siguientes productos de matrices:

si	$A \in \mathcal{M}_{5\times 2}(\mathbb{R})$	y	$B \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$,	entonces	$AB \in \mathcal{M}_{5\times 3}(\mathbb{R})$;
si	$A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$	y	$B \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$,	entonces	AB no está definida;
si	$A \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$	y	$B \in \mathcal{M}_{4\times 2}(\mathbb{R})$,	entonces	AB
si	$A \in \mathcal{M}_{1\times 3}(\mathbb{R})$	y	$B \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$,	entonces	AB
si	$A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$	y	$B \in \mathcal{M}_{2\times 4}(\mathbb{R})$,	entonces	AB
si	$A \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$	y	$B \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$,	entonces	AB
si	$A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$	y	$B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$,	entonces	AB
si	$A \in \mathcal{M}_{1\times 4}(\mathbb{R})$	y	$B \in \mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})$,	entonces	AB
si	$A \in \mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})$	y	$B \in \mathcal{M}_{1\times 4}(\mathbb{R})$,	entonces	AB

9. Consideremos la suma $\sum_{k=1}^{n} A_{i,k} B_{k,j}$.

- La suma consiste de $\underbrace{\qquad\quad}_{?}$ sumandos.
- Cada sumando es el producto de una entrada de A por ...
- El primer índice de la entrada $A_{i,k}$ es i.

  Por lo tanto $A_{i,k}$ está en el $\underbrace{\qquad}_{?}$-ésimo renglón de la matriz A.
- El segundo índice de la entrada $B_{k,j}$ es $\underbrace{\qquad\quad}_{?}$.

  Por lo tanto ...

Ejemplo. Sean $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Expresar la entrada $(AB)_{2,1}$ del producto AB a través de ciertas entradas de A y B.

Solución. Notemos que el producto AB está bien definido y es de tamaño 2×3. La entrada $(AB)_{2,1}$ depende solamente del segundo renglón de A y de la primera columna de B:

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & B_{2,3} \\ B_{3,1} & B_{3,2} & B_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ ? & & \end{bmatrix}.$$

Multiplicamos el segundo renglón de A por la primera columna de B:

$$(AB)_{2,1} = A_{2,1}B_{1,1} + A_{2,2}B_{2,1} + A_{2,3}B_{3,1} = \sum_{k=1}^{3} A_{2,k} B_{k,1}. \qquad \square$$

10. Sean $A \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$. Exprese la entrada $(AB)_{2,3}$ del producto AB a través de entradas de A y B.

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \\ A_{3,1} & A_{3,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & B_{2,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & & ? \\ & & \end{bmatrix}.$$

Respuesta:

$$(AB)_{2,3} =$$

11. Sea $A \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$ y sea $B \in \mathcal{M}_{4\times 2}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \\ B_{3,1} & B_{3,2} \\ B_{4,1} & B_{4,2} \end{bmatrix}.$$

Calcule el producto AB:

$$\left[\begin{array}{c|c} \phantom{A_{3,1}B_{1,1} + A_{3,2}B_{2,1} + A_{3,3}B_{3,1} + A_{3,4}B_{4,1}} & \phantom{A_{3,1}B_{1,1} + A_{3,2}B_{2,1} + A_{3,3}B_{3,1} + A_{3,4}B_{4,1}} \\ \hline & \\ \hline A_{3,1}B_{1,1} + A_{3,2}B_{2,1} + A_{3,3}B_{3,1} + A_{3,4}B_{4,1} & \end{array}\right].$$

12. Sean $A \in \mathcal{M}_{4\times 2}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \\ A_{3,1} & A_{3,2} \\ A_{4,1} & A_{4,2} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & B_{2,3} \end{bmatrix}.$$

Calcule el producto AB:

$$AB = \left[\begin{array}{c|c|c} \phantom{A_{2,1}B_{1,3} + A_{2,2}B_{2,3}} & \phantom{A_{2,1}B_{1,3} + A_{2,2}B_{2,3}} & \\ \hline & & A_{2,1}B_{1,3} + A_{2,2}B_{2,3} \\ \hline & & \\ \hline & & \end{array}\right].$$

13. Calcule el producto AB:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 8 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Solución:

$$AB = \left[\begin{array}{c|c} \qquad\qquad & 35 + 8 - 9 \\ \hline \qquad\qquad & \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \qquad & 34 \\ \hline \qquad & \end{array}\right]$$

14. Calcule el producto BA, donde A y B son las matrices del ejercicio anterior.

$$B = \begin{bmatrix} \qquad & \qquad \\ & \\ & \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} \qquad & \qquad & \qquad \\ & & \end{bmatrix}.$$

Solución:

$$BA = \left[\begin{array}{c|c|c} \qquad\qquad & \qquad\qquad & \qquad\qquad \\ \hline & & \\ \hline & & \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c} \qquad & \qquad & \qquad \\ \hline & & \\ \hline & & \end{array}\right]$$

Respuestas.

$$AB = \begin{bmatrix} -23 & 34 \\ -32 & 11 \end{bmatrix}, \qquad BA = \begin{bmatrix} -10 & -26 & -43 \\ 5 & 31 & 53 \\ 20 & -16 & -33 \end{bmatrix}.$$