Matrices. Definición de las operaciones con matrices

Objetivos. Definir de manera formal las operaciones con matrices (adición de matrices, multiplicación de una matriz por un número, multiplicación de matrices) y con ayuda de ejemplos observar las propiedades principales de estas operaciones. En las siguientes clases vamos a demostrar las propiedades de manera formal.

Requisitos. Conjunto $\mathbb{F}^n$ y operaciones lineales en $\mathbb{F}^n$. Motivación del concepto de una matriz y de las operaciones con matrices.

1. Definición (matriz). Una *matriz* m por n es una tabla de tamaño m por n. Aquí m es el número de las filas, n es el número de las columnas. La *entrada* (la *componente*, el *elemento*) de la matriz A que está en la i-ésima fila y la j-ésima columna la denotamos por $A_{i,j}$. Las entradas de matrices pueden ser números u objetos más complicados. Sea $\mathbb{F}$ un campo y sean m, n números enteros positivos. Denotemos por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ al conjunto de todas las matrices de tamaños $m \times n$ cuyas entradas pertenecen a $\mathbb{F}$.

2. Definición más formal. Una matriz de tamaño m por n con elementos del campo $\mathbb{F}$ se puede definir como una función $\{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{F}$.

3. Definición (igualdad de las matrices). Matrices A y B se llaman *iguales* si sus tamaños coinciden (el número de filas de A coincide con el número de filas de B, el número de columnas de A coincide con el número de columnas de B), y las entradas correspondientes de A y B son iguales: $A_{i,j} = B_{i,j}$ para todos i, j.

4. Ejemplo. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5/2 & 4 & 0 \\ -7 & 2 & 0 & 15 \\ 2 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Entonces $A \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$. También es verdad que $A \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{Q})$ y que $A \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{C})$. Escribamos los valores de algunas entradas de A: $A_{1,2} = -5/2$, $A_{3,3} = 4$, $A_{5,2}$ no está definido.

5. Ejercicio. Escriba en forma extensa cada una de las siguientes matrices:

$$A = \left[(-1)^i \cdot (i+j)\right]_{i,j=1}^{2,3}, \qquad B = \left[\min(i,j)\right]_{i,j=1}^{4,2}.$$

6. Ejercicio. Escriba en forma compacta cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Operaciones con matrices

7. Definición (suma de matrices). Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$. Entonces la *suma* de A y B se define como

$$A + B \coloneqq \left[A_{i,j} + B_{i,j}\right]_{i,j=1}^{m,n}.$$

Esto es, $A + B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ y

$$\forall i \in \{1, \ldots, m\} \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\} \qquad (A + B)_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}.$$

8. Definición (producto de un escalar por una matriz). Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ y $\lambda \in \mathbb{F}$. Entonces el *producto* de λ por A se define como

$$\lambda A \coloneqq \left[\lambda A_{i,j}\right]_{i,j=1}^{m,n}.$$

En otras palabras, $\lambda A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ y

$$\forall i \in \{1, \ldots, m\} \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\} \qquad (\lambda A)_{i,j} = \lambda A_{i,j}.$$

9. Ejemplo. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}.$$

Calcule $A + B$ y $5A$.

10. Propiedades de las operaciones lineales con las matrices. Es fácil ver que el conjunto $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ con las operaciones lineales (suma de matrices y producto de una matriz por un escalar) cumplen con las mismas propiedades aritméticas que las operaciones lineales en $\mathbb{F}^n$. Por ejemplo, la adición es asociativa y conmutativa, la *matriz nula* $\mathbf{0}_{m,n}$ es un elemento neutro con respecto a la adición, $1A = A$ para toda A, etc.

11. Definición (producto de matrices). Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ y $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{F})$. Entonces el *producto* de A por B se define como

$$AB \coloneqq \left[\sum_{k=1}^{n} A_{i,k}B_{k,j}\right]_{i,j=1}^{m,p}.$$

Esto es, $AB \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{F})$ y para todos $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, p\}$,

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}B_{k,j}.$$

12. Ejemplo. Calculemos el producto de dos matrices:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15-4 & -3+0 & 9-4 \\ 5+10 & -1+0 & 3+10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -3 & 5 \\ 15 & -1 & 13 \end{bmatrix}.$$

13. Ejemplo. Calcular el producto de las matrices:

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

14. La multiplicación de matrices no es conmutativa, ejemplo 1. Sean $A \in \mathcal{M}_{5\times 3}(\mathbb{F})$, $B \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{F})$. Entonces el producto AB está bien definido y pertenece a $\mathcal{M}_{5\times 2}(\mathbb{F})$, pero el producto BA no está definido.

15. La multiplicación de matrices no es conmutativa, ejemplo 2. Calcular AB y BA:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -5 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

16. La multiplicación de matrices no es conmutativa, ejemplo 3. Calcular AB y BA:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

17. Ejercicio. Sean A y B matrices tales que existen ambos productos AB y BA, ¿Qué podemos concluir sobre los tamaños de A y B? ¿Tienen que ser cuadradas las matrices A y B o no necesariamente?.

18. Definición (la traza de una matriz). Sea A una matriz cuadrada: $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. La *traza* de A se define mediante la fórmula:

$$\operatorname{tr}(A) := \sum_{k=1}^{n} A_{k,k}.$$

19. La traza del producto no depende del orden de los factores. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Demuestre que $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

20. Propiedad distributiva. Calcular $(A+B)C$ y $AC+BC$:

$$A=\begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad C=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

21. Ejercicio. Calcule $A(B+C)$ y $AB+AC$, si

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad C=\begin{bmatrix} -3 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

22. Ejercicio. Dé un ejemplo de matrices $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tales que

$$AC+CB \neq (A+B)C.$$

23. Propiedad asociativa. Calcular $A(BC)$ y $(AB)C$:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 8 \\ 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}, \qquad C=\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

24. Ejercicio. Calcule $A(BC)$ y $(AB)C$:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \qquad C=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

25. Ejercicio. Calcule el siguiente producto. Simplifique el resultado usando fórmulas trigonométricas.

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\operatorname{sen}(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\operatorname{sen}(\beta) \\ \operatorname{sen}(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix}.$$

26. Propiedades del producto de las matrices. La operación de multiplicación de matrices cumple con las siguientes propiedades:

- $A(B+C)=AB+AC$ (es aditiva con respecto al segundo argumento).
- ... (es aditiva con respecto al primer argumento).
- $A(\lambda B)=\lambda AB$ (es homogénea con respecto al segundo argumento).
- ... (es homogénea con respecto al primer argumento).
- $A(\lambda B+\mu C)=\lambda AB+\mu AC$ (es lineal con respecto al segundo argumento).
- ... (es lineal con respecto al primer argumento).
- $A(BC)=(AB)C$ (es asociativa).

Escriba todas las propiedades mencionadas.