Matriz asociada al operador de rotación en el plano

Ejercicios

Objetivos. Calcular la matriz asociada al operador de rotación del plano en un ángulo fijo α, respecto a una base ortonormal.

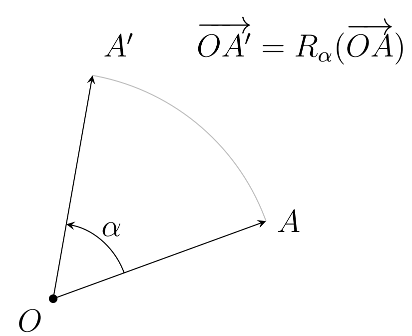
Requisitos. Transformación lineal, base, matriz asociada.

1. Espacio $V^2(O)$. Sea Π un plano cuya geometría se describe con los axiomas de Euclides–Hilbert y sea O un punto fijo del plano Π. El espacio $V^2(O)$ que consiste en todas las *flechas* (*segmentos dirigidos*) de la forma $\overrightarrow{OM}$, donde $M \in \Pi$. La suma de dos flechas que no están en una linea se define por la regla de paralelogramo.

2. Rotación del plano en un ángulo fijo α. Sea α un ángulo fijo. Consideremos la función

$$R_\alpha \colon V^2(O) \to V^2(O)$$

que manda cualquier vector $\overrightarrow{OA}$ al vector $\overrightarrow{OA'}$ que se obtiene del vector $\overrightarrow{OA}$ al rotarlo en el ángulo α contra las manecillas del reloj. El dibujo corresponde al ángulo $\alpha = \frac{\pi}{3}$:

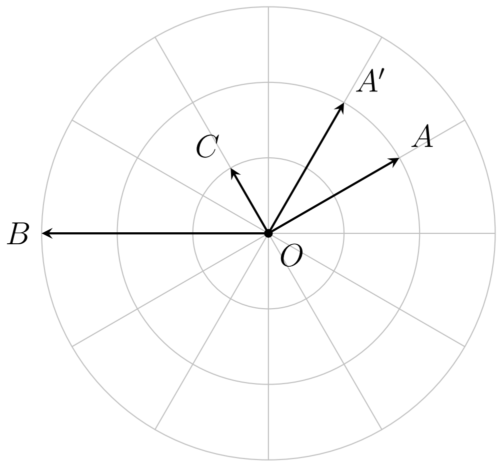


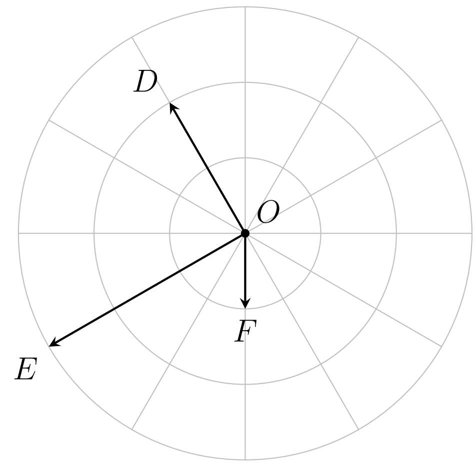
3. Ejemplos con $R_{\pi/4}$. Aplique $R_{\pi/4}$ a cada uno de los vectores $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$:

4. Ejemplos de rotación en el ángulo $\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$.

Aplique $R_{\pi/6}$ a cada uno de los vectores $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}$.

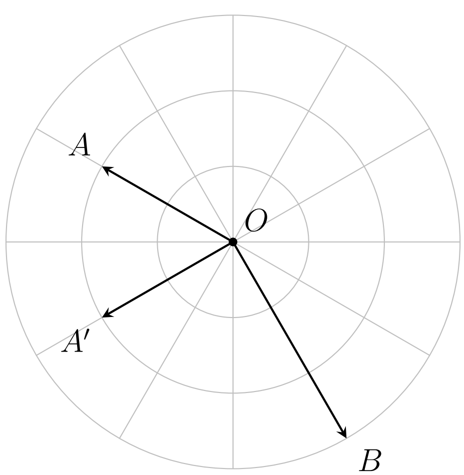
Recuerde que la rotación preserva la longitud de vectores.

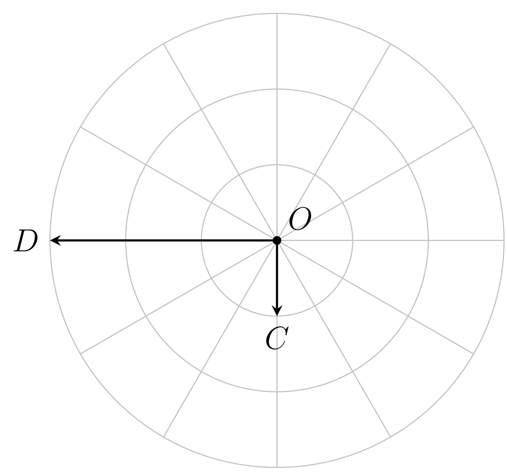




5. Ejemplos de rotación en el ángulo $\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$.

Aplique $R_{\pi/3}$ a cada uno de los vectores $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$:

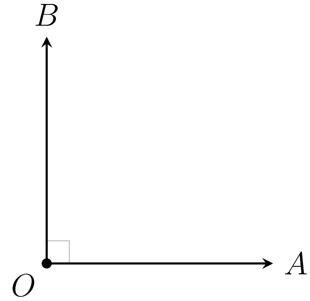




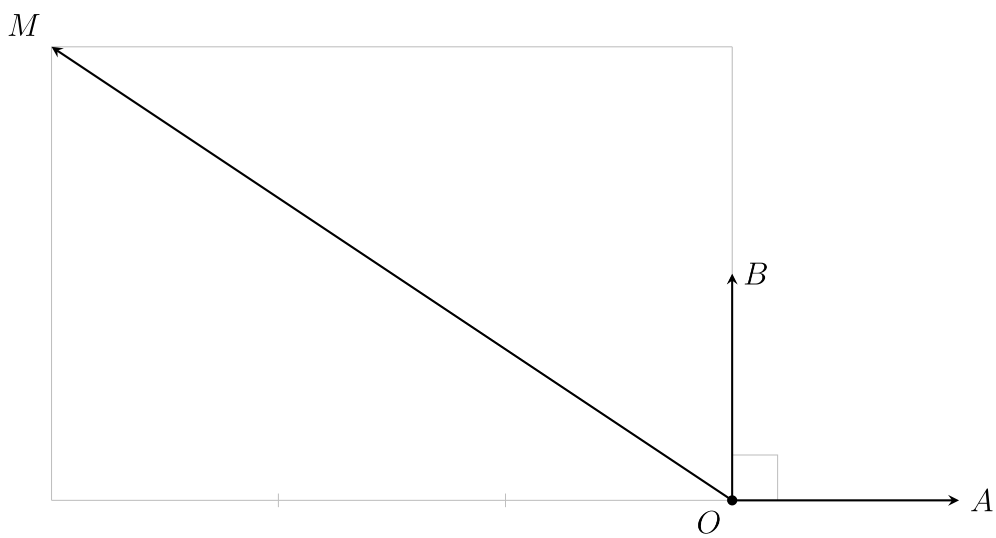
6. Fijemos una base ortonormal del espacio $V^2(O)$.

Fijemos en $V^2(O)$ una *base ortonormal* $\mathcal{E} = \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$.

La palabra *ortonormal* significa que el vector $\overrightarrow{OB}$ es perpendicular al vector $\overrightarrow{OA}$ y ambos estos vectores son de longitud 1.



Cada vector del espacio $V^2(O)$ tiene una única expansión en base $\mathcal{E}$.
Consideremos un ejemplo:



Escriba el vector $\overrightarrow{OM}$ como una combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$,

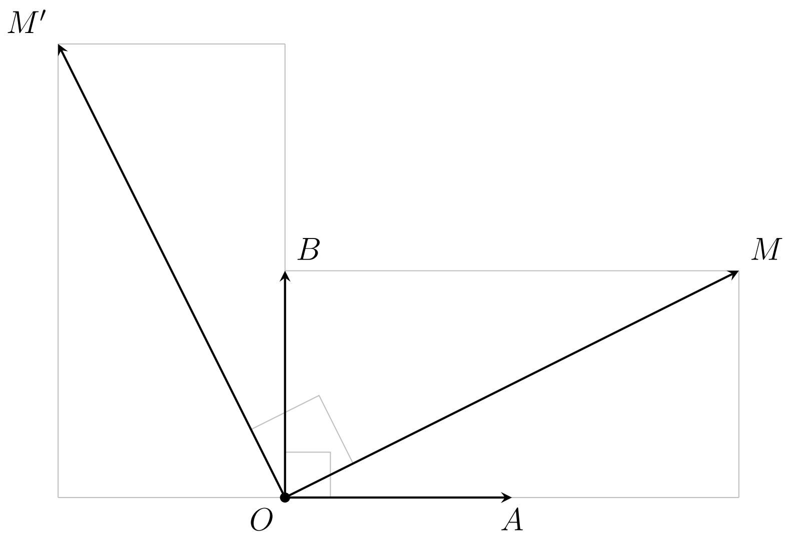
$$\overrightarrow{OM} = \underbrace{\qquad}_{?}\ \overrightarrow{OA} + \underbrace{\qquad}_{?}\ \overrightarrow{OB},$$

luego escriba los coeficientes como un vector columna:

$$\left(\overrightarrow{OM}\right)_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}.$$

7. Coordenadas del vector rotado en el ángulo recto.

Suponemos que $\overrightarrow{OM'} = R_{\pi/2}(\overrightarrow{OM})$:

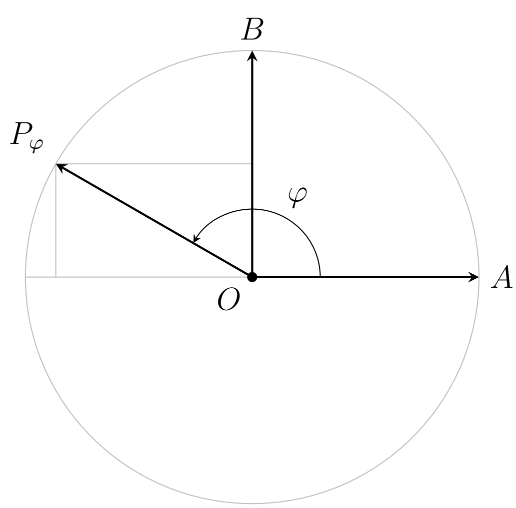


De la igualdad de triángulos obtenemos (cuidado con los signos):

$$\text{si} \qquad \left(\overrightarrow{OM}\right)_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \qquad \text{entonces} \qquad \left(\overrightarrow{OM'}\right)_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}.$$

8. Coordenadas de un punto de la circunferencia unitaria.

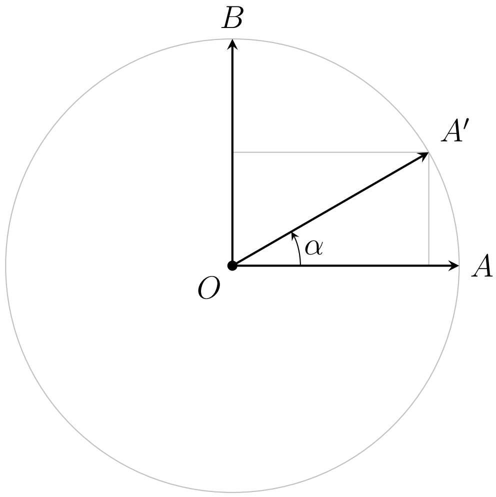
En la circunferencia unitaria consideremos el punto P_φ correspondiente a un ángulo φ, es decir, el punto que se obtiene de A al hacer un giro al ángulo φ alrededor de O. Recuerde la definición geométrica de las funciones trigonométricas cos y sen y escriba las coordenadas del vector $\overrightarrow{OP_\varphi}$ en base $\mathcal{E}$.



$$\overrightarrow{OP_\varphi} = \underbrace{\qquad}_{?}\,\overrightarrow{OA} + \underbrace{\qquad}_{?}\,\overrightarrow{OB}.$$

$$\left(\overrightarrow{OP_\varphi}\right)_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}.$$

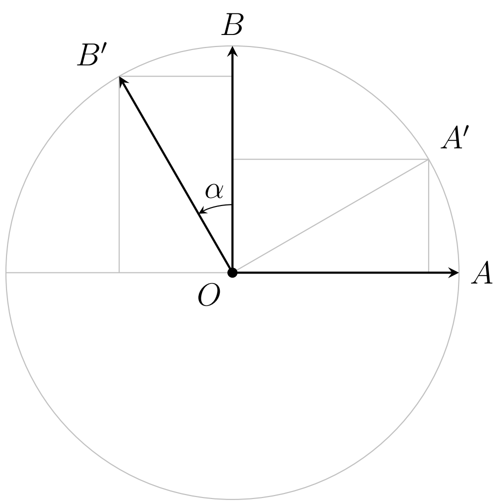
9. Aplicamos $\boldsymbol{R_\alpha}$ al primer vector básico. $\quad \overrightarrow{OA'} \coloneqq R_\alpha\left(\overrightarrow{OA}\right)$.



Obviamente $A' = P_\varphi$ con $\varphi = \underbrace{\qquad}_{?}$,

por eso $\left(\overrightarrow{OA'}\right)_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} \qquad \\ \qquad \end{bmatrix}$.

10. Aplicamos $\boldsymbol{R_\alpha}$ al segundo vector básico. $\quad \overrightarrow{OB'} \coloneqq R_\alpha\left(\overrightarrow{OB}\right)$.



Usando la igualdad de triángulos calculamos las coordenadas de $\overrightarrow{OB'}$ (cuidado con los signos):

$\left(\overrightarrow{OB'}\right)_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} \qquad \\ \qquad \end{bmatrix}$.

11. Matriz asociada al operador $\boldsymbol{R_\alpha}$.
Juntando las columnas $\left(\overrightarrow{OA'}\right)_{\mathcal{E}}$ y $\left(\overrightarrow{OB'}\right)_{\mathcal{E}}$
obtenemos la matriz asociada al operador R_α respecto a la base $\mathcal{E}$:

$$(R_\alpha)_{\mathcal{E}} = \left[\begin{array}{c|c} \qquad & \qquad \\ \hline \qquad & \qquad \end{array}\right].$$

Esta matriz se llama la *matriz de rotación* en el ángulo α.

Producto de dos matrices de rotación

12. Recuerde las fórmulas trigonométricas para $\cos(\alpha+\beta)$ y $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$:

$$\cos(\alpha+\beta) = \qquad (1)$$

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \qquad (2)$$

13. Multiplicamos dos matrices de rotación, $\left(R_\alpha\right)_{\mathcal{E}}$ y $\left(R_\beta\right)_{\mathcal{E}}$:

$$\begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}.$$

Usando las fórmulas (1) y (2) simplificamos la matriz obtenida:

$$\left(R_\alpha\right)_{\mathcal{E}} \left(R_\beta\right)_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}.$$

Es resultado tiene una interpretación geométrica natural. Si rotamos un vector $\overrightarrow{OM}$ en el ángulo β y luego rotamos el resultado al ángulo α, es lo mismo que

$$\underbrace{\hspace{8cm}}_{?}$$

Así que

$$R_\alpha R_\beta = \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{?}. \qquad (3)$$

14. Sugerencia: cómo recordar fórmulas trigonométricas usando matrices.
Si uno olvida las fórmulas trigonométricas (1) y (2), puede deducirlas rápidamente usando la igualdad (3) y multiplicando dos matrices de rotación.