Matriz asociada a una transformación lineal respecto a un par de bases

Ejercicios

Objetivos. Comprender cómo se describe una transformación lineal (que actúa en espacios vectoriales de dimensiones finitas) por medio de una matriz. Más precisamente, demostrar la fórmula

$$(T(v))_{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} v_{\mathcal{A}}.$$

Requisitos. Transformación lineal, vector columna de coordenadas de un vector respecto a una base, multiplicación de matrices, multiplicación de una matriz por un vector.

1. Ejemplo simple. Consideremos la transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x) = \begin{bmatrix} -4x_1 + 5x_2 + 7x_3 \\ 6x_2 + x_3 \end{bmatrix}.$$

En este ejercicio denotemos por $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

y por $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$:

$$b_1 = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}.$$

Calcule $T(a_1)$, $T(a_2)$, $T(a_3)$:

$$T(a_1) = \begin{bmatrix} \qquad \\ \qquad \end{bmatrix}, \qquad T(a_2) = \begin{bmatrix} 5 \\ \qquad \end{bmatrix}, \qquad T(a_3) = \begin{bmatrix} \qquad \\ \qquad \end{bmatrix}.$$

Como $\mathcal{B}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^2$, cada vector $T(a_j)$ coincide con la columna $(T(a_j))_{\mathcal{B}}$ de sus coordenadas respecto $\mathcal{B}$. Formamos una matriz C de estas columnas:

$$C = \left[\begin{array}{c|c|c} \qquad & 5 & \qquad \\ \hline \qquad & \qquad & \qquad \end{array}\right].$$

Multiplique C por x y compare el resultado con $T(x)$:

$$Cx = \left[\begin{array}{c|c|c} \qquad & \qquad & \qquad \\ \hline \qquad & \qquad & \qquad \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} \qquad\qquad\qquad \\ \hline \qquad\qquad\qquad \end{array}\right] \overset{\text{reconozca a este amigo viejo}}{=\!=\!=\!=\!=} \underbrace{\qquad}_{?}.$$

Vamos a ver que en una situación general (para toda transformación lineal que actúa en espacios vectoriales de dimensiones finitas) se cumple una fórmula similar.

Coordenadas de un vector respecto a una base (repaso)

Aquí suponemos que V es un espacio vectorial real y $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ es una base de V, es decir, los vectores a_1, a_2, a_3 generan a V y son linealmente independientes.

2. Definición de base (repaso). La afirmación que a_1, a_2, a_3 generan a V significa que para todo $v \in V$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{existen/para todos}} \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \qquad \text{tales que} \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}.$$

La afirmación que a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes significa que para todos escalares $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$

$$\text{de la igualdad} \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?} \qquad \text{se sigue que} \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}.$$

3. Unicidad de la expansión de un vector en una base (repaso). Supongamos que para un vector $v \in V$ tenemos las siguientes expansiones en la base $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$:

$$v = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 \qquad \text{y al mismo tiempo} \qquad v = z_1 a_1 + z_2 a_2 + z_3 a_3.$$

Restamos una expansión de la otra:

$$(\underbrace{\qquad\qquad}_{?})a_1 + (\underbrace{\qquad\qquad}_{?})a_2 + (\underbrace{\qquad\qquad}_{?})a_3 = \mathbf{0}.$$

Como a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes, podemos concluir que

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}$$

4. Columna de coordenadas de un vector respecto a una base (repaso). Dado un vector $v \in V$, denotemos por $v_{\mathcal{A}}$ la columna de sus coordenadas respecto a la base $\mathcal{A}$. Por ejemplo,

$$\text{si} \quad v = 5a_1 - 7a_2 + a_3, \quad \text{entonces} \quad v_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \qquad \\ \\ \\ \end{bmatrix}.$$

Otro ejemplo:

$$\text{si} \quad v_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \text{entonces} \quad v = \underbrace{\quad}_{?} a_1 + \underbrace{\quad}_{?} a_2 + \underbrace{\quad}_{?} a_3.$$

Transformaciones lineales (repaso)

Aquí suponemos que V y W son algunos espacios vectoriales reales.

5. Definición de transformación lineal (repaso). Una función $T\colon V \to W$ se llama *transformación lineal* si es aditiva y homogénea. La propiedad *aditiva* significa que

$$\forall u, v \in \underbrace{\qquad\quad}_{?} \qquad T(u+v) = \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?},$$

y la propiedad *homogénea* significa que

$$\forall \lambda \in \underbrace{\qquad\quad}_{?} \qquad \forall v \in \underbrace{\qquad\quad}_{?} \qquad T(\lambda v) = \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}.$$

6. Transformación lineal aplicada a una suma de tres vectores (repaso). Sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal y sean v_1, v_2, v_3 algunos vectores del espacio V. Simplifique la expresión:

$$T(v_1 + v_2 + v_3) = \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}$$

7. Transformación lineal aplicada a una combinación lineal de tres vectores (repaso). Sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal, sean v_1, v_2, v_3 algunos vectores del espacio V y $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ algunos escalares. Simplifique la expresión:

$$T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3) = T(\underbrace{\qquad}_{?}) + T(\underbrace{\qquad}_{?}) + T(\underbrace{\qquad}_{?}) = \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}$$

8. Transformación lineal aplicada a una combinación lineal de p vectores (repaso). Sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal, sean $v_1, \ldots, v_p$ algunos vectores del espacio V y $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ algunos escalares. Simplifique la expresión:

$$T\left(\sum_{j=1}^{p} \lambda_j v_j\right) = \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

Definición de la matriz asociada a una transformación lineal para el caso dim(dominio) = 3, dim(contradominio) = 2

Aquí suponemos que V y W son espacios vectoriales reales, $\dim(V) = 3$, $\dim(W) = 2$, $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ es una base de V y $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ es una base de W.

9. ¿A qué espacio pertenece $\boldsymbol{T(a_j)}$ y en qué base lo podemos expandir?.
Sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal.

Entonces $T(a_1)$ es un elemento del espacio $\underbrace{\qquad\quad}_{?}$.

En este espacio hemos elegido una base que denotamos por $\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}$.

Por lo tanto, $T(a_1)$ es una combinación lineal de los vectores $\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}$.

10. Definición de la matriz asociada a una transformación lineal (ejemplo).
Supongamos que $T\colon V \to W$ es una transformación lineal y que

$$T(a_1) = 3b_1 + 5b_2, \qquad T(a_2) = 2b_1 - 6b_2, \qquad T(a_3) = 8b_2.$$

Escribimos las columnas de coordenadas de los vectores $T(a_1)$, $T(a_2)$ y $T(a_3)$ respecto a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$:

$$(T(a_1))_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad (T(a_2))_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \qquad (T(a_3))_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}.$$

La matriz formada de estas columnas se denota por $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$ y se llama la *matriz asociada a T respecto a las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$*:

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \left[\begin{array}{c|c|c} \quad & 2 & \quad \\ \hline \quad & \quad & \quad \end{array}\right].$$

Muestre con flechas la correspondencia entre los tamaños de la matriz $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$ y las dimensiones del dominio y contradominio de T:

número de filas de $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$

dimensión del dominio de T

número de columnas de $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$

dimensión del contradominio de T

11. Otro ejemplo. Sea $T \colon V \to W$ es una transformación lineal tal que

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & -4 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$T(a_1) = \underbrace{\qquad}_{?} b_1 + \underbrace{\qquad}_{?} b_2, \qquad T(a_2) = \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}, \qquad T(a_3) = \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}.$$

12. ¿Qué sentido tienen las entradas de la matriz asociada a una tranformación lineal?. Ahora suponemos que V y W son espacios vectoriales reales, $\mathcal{A} = (a_1, a_2)$ es una base de V, $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ es una base de W, $T \colon V \to W$ es una transformación lineal. Denotemos las entradas de la matriz asociada por $C_{i,j}$:

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} \\ C_{2,1} & C_{2,2} \\ C_{3,1} & C_{3,2} \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$T(a_1) = C_{1,1}\, b_1 + \underbrace{\qquad}_{?} b_2 + \underbrace{\qquad}_{?} b_3 = \sum_{i=1}^{3} \underbrace{\qquad\quad}_{?} b_i;$$

$$T(a_2) = \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?} = \sum_{i=1}^{3} \underbrace{\qquad\quad}_{?} b_i.$$

Generalizando estas igualdades expresamos $T(a_j)$ en términos de los b_i y $C_{i,j}$:

$$T(a_j) = \sum_{i=1}^{3} \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}. \tag{1}$$

Cuando j es fijo, los coeficientes $C_{i,j}$ están en una $\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{fila/columna}}$ de la matriz asociada.

El número de sumandos en el lado derecho de (1) es igual al número de $\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{filas/columnas}}$ de la matriz asociada.

Representación matricial de una transformación lineal (caso particular $\dim(W) = 2$, $\dim(V) = 3$)

Aquí suponemos que $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ es una base de V, $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ es una base de W y $T \colon V \to W$ es una transformación lineal.

13. Notación breve para los objetos que consideramos. Sea v un vector de V. Denotemos por x al vector columna de las coordenadas de v respecto a la base $\mathcal{A}$:

$$v_{\mathcal{A}} = x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

así que

$$v = \underbrace{\qquad}_{?} a_1 + \underbrace{\qquad}_{?} a_2 + \underbrace{\qquad}_{?} a_3. \tag{2}$$

El vector $T(v)$ pertenece al espacio W; denotemos por y al vector columna de sus coordenadas respecto a la base $\mathcal{B}$:

$$(T(v))_{\mathcal{B}} = y = \begin{bmatrix} \qquad \\ \\ \end{bmatrix},$$

esto es,

$$T(v) = \underbrace{\qquad}_{?} b_1 + \underbrace{\qquad}_{?} b_2. \tag{3}$$

Denotamos la matriz $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$ por C, para que sea más fácil hablar de sus entradas:

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = C = \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & C_{1,3} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & C_{2,3} \end{bmatrix}.$$

Entonces de la definición de la matriz $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$ sigue que sus entradas sirven como coeficientes de las expansiones de $T(a_1), T(a_2), T(a_3)$ en base $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$:

$$\begin{aligned} T(a_1) &= \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}, \\ T(a_2) &= \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}, \\ T(a_3) &= \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}. \end{aligned} \tag{4}$$

14. Deducción de la representación matricial de una transformación lineal para el caso 2×3. Usamos las notaciones del ejercicio anterior. Escriba v como una combinación lineal de a_1, a_2, a_3 (ecuación (2)) y aplique la linealidad de T:

$$T(v) = T\Big(\underbrace{\qquad}_{?}\, a_1 + \underbrace{\qquad}_{?}\, a_2 + \underbrace{\qquad}_{?}\, a_3\Big) = \underbrace{\qquad}_{?}\, T(a_1) + \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}.$$

Sustituya $T(a_1), T(a_2), T(a_3)$ por combinaciones lineales de b_1, b_2 usando (4):

$$T(v) = \Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\Big) + \Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\Big) + \Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\Big).$$

Reagrupe los sumandos y escriba $T(v)$ como una combinación lineal de b_1 y b_2:

$$T(v) = \Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\Big) b_1 + \Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\Big) b_2.$$

La igualdad obtenida nos da expresiones para las coordenadas de $T(v)$ respecto $\mathcal{B}$.
Por otro lado, hemos denotado estas coordenadas por y_1, y_2.
Como la expansión de un vector en una base es única,

$$y_1 =$$

$$y_2 =$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}.$$

Reescribimos la misma igualdad en forma breve:

$$y = \underbrace{\qquad\quad}_{?}.$$

Ahora en términos de $v_{\mathcal{A}}$, $(T(v))_{\mathcal{B}}$ y $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$:

$$(T(v))_{\mathcal{B}} = \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}.$$

Demostración general, para $\dim(W) = m$ y $\dim(V) = n$

15. Notación. Consideramos una transformación lineal $T\colon V \to W$,
donde V es un espacio vectorial de dimensión n con una base $\mathcal{A}$
y W es un espacio vectorial de dimensión m con una base $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{A} = \big(a_1, \ldots, \underbrace{\quad}_{a_?}\big), \qquad \mathcal{B} = \big(b_1, \ldots, \underbrace{\quad}_{?}\big).$$

Sea v un vector del espacio V. Denotemos $v_{\mathcal{A}}$ por x, $(T(v))_{\mathcal{B}}$ por y, $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$ por C:

$$v = \sum_{j=}^{\overbrace{\quad}^{?}} x_j a_j. \tag{5}$$

$$T(v) = \sum_{i=} \underbrace{\qquad\qquad}_{?}. \tag{6}$$

$$T(a_j) = \sum_{i=} \underbrace{\qquad\qquad}_{?}. \tag{7}$$

16. Deducción de la fórmula para el caso general. Consideremos $T(v)$. Aplicamos la expansión (5) y la linealidad de T:

$$T(v) = T\left(\sum_{j=} \underbrace{\qquad\qquad}_{?}\right) = \sum_{j=} \underbrace{\qquad\qquad}_{?}.$$

Usando (7) expresamos $T(a_j)$ como una combinación lineal de b_i, luego aplicamos propiedades de sumas:

$$T(v) = \sum_{j=} \sum_{i=} \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?} = \qquad\qquad\qquad\qquad = \sum_{i=} \left(\sum_{j=} \underbrace{\qquad\qquad}_{?}\right) b_i.$$

Comparando con (6) obtenemos una fórmula para la i-ésima coordenada de $T(v)$:

$$\forall i \in \{1, \ldots, \underbrace{\quad}_{?}\} \qquad\qquad y_i = \sum_{j=} \underbrace{\qquad\qquad\quad}_{?}. \tag{8}$$

De la definición del producto de una matriz por un vector sigue que podemos escribir (8) en términos de x, y, C; luego escribimos lo mismo en términos de $v_{\mathcal{A}}$, $(T(v))_{\mathcal{B}}$ y $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$:

$$y = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}, \qquad \text{esto es,} \qquad (T(v))_{\mathcal{B}} = \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}.$$

Ejemplo

17. Problema. Denotamos por $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ al espacio de polinomios de una variable real de dimensión ≤ 2. Consideramos la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente regla de correspondencia:

$$\forall f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \qquad T(f) \coloneqq \begin{bmatrix} f(-3) \\ f'(2) \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Es fácil ver que T es lineal, no lo vamos a demostrar aquí. Vamos a calcular la matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, donde $\mathcal{A} = (a_0, a_1, a_2)$ es la base canónica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ y $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ es la base canónica de $\mathbb{R}^2$:

$$a_0(x) = 1, \qquad a_1(x) = x, \qquad a_2(x) = \underbrace{\qquad}_{?}, \qquad b_1 = \begin{bmatrix} \qquad \\ \qquad \end{bmatrix}, \qquad b_1 = \begin{bmatrix} \qquad \\ \qquad \end{bmatrix}.$$

Para comprobación calculamos de dos maneras diferentes $T(g)$, donde $g(x) = 2 - x + 5x^2$.

Solución. Para calcular $T(a_j)$, necesitamos las derivadas de a_j:

$$a_0'(x) = \underbrace{\qquad}_{?}, \qquad a_1'(x) = \underbrace{\qquad}_{?}, \qquad a_2'(x) = \underbrace{\qquad}_{?}.$$

Usando (9) calculamos las imágenes de a_0, a_1, a_2 bajo T y sus expansiones en base $\mathcal{B}$:

$$T(a_0) = \begin{bmatrix} a_0(-3) \\ a_0'(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \qquad \\ \qquad \end{bmatrix} = \underbrace{\qquad}_{?} b_1 + \underbrace{\qquad}_{?} b_2.$$

$$T(a_1) = \begin{bmatrix} a_1(-3) \\ a_1'(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \qquad \\ \qquad \end{bmatrix} = \underbrace{\qquad}_{?} b_1 + \underbrace{\qquad}_{?} b_2.$$

$$T(a_2) = \begin{bmatrix} a_2(-3) \\ a_2'(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \qquad \\ \qquad \end{bmatrix} = \underbrace{\qquad}_{?} b_1 + \underbrace{\qquad}_{?} b_2.$$

Formamos la matriz $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$ de los coeficientes obtenidos (por columnas):

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \left[\begin{array}{c|c|c} \qquad & \qquad & \qquad \\ \hline \qquad & \qquad & \qquad \end{array}\right].$$

Comprobación. Para $g(x) = 2 - x + 5x^2$ tenemos

$$g'(x) = \underbrace{\qquad\qquad}_{?},$$

así que

$$T(g) \overset{(9)}{=} \left[\begin{array}{c} \qquad\qquad \\ \\ \end{array}\right].$$

Por otro lado,

$$g(x) \;=\; \underbrace{\qquad}_{?}\, a_0(x) \;+\; \underbrace{\qquad}_{?}\, a_1(x) \;+\; \underbrace{\qquad}_{?}\, a_2(x),$$

y la columna de coordenadas de g en base $\mathcal{A} = (a_0, a_1, a_2)$ es

$$g_{\mathcal{A}} = \left[\begin{array}{c} \qquad \\ \hline \qquad \\ \hline \qquad \end{array}\right].$$

Aplicando la fórmula principal

$$(T(g))_{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}\, g_{\mathcal{A}},$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} (T(g))_{\mathcal{B}} &= \left[\begin{array}{c|c|c} \qquad & \qquad & \qquad \\ \hline \qquad & \qquad & \qquad \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \qquad \\ \hline \qquad \\ \hline \qquad \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c} \qquad\qquad\qquad \\ \hline \qquad\qquad\qquad \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \qquad \\ \\ \end{array}\right]. \end{aligned}$$

$\square$

Unicidad de la matriz que representa una transformación lineal en un par de bases

18. Enunciado para $\dim(V) = 3$, $\dim(W) = 2$. Sean $T\colon V \to W$ una transformación lineal, $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ una base de V y $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ una base de W. Supongamos que $C \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ es una matriz tal que para todo $v \in V$

$$(T(v))_{\mathcal{B}} = Cv_{\mathcal{A}}. \tag{10}$$

Vamos a demostrar que en esta situación la matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$ coincide con C.

19. Demostración para $\dim(V) = 3$ y $\dim(W) = 2$. Según la definición de $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$ tenemos que calcular los vectores $T(a_1)$, $T(a_2)$, $T(a_3)$ y sus coordenadas en base $\mathcal{B}$. Primero expandimos cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 en base $\mathcal{A}$:

$$a_1 = \underbrace{\qquad}_{?} a_1 + \underbrace{\qquad}_{?} a_2 + \underbrace{\qquad}_{?} a_3;$$

$$a_2 = \qquad a_1 + \qquad a_2 + \qquad a_3, \qquad\qquad a_3 = \qquad a_1 + \qquad a_2 + \qquad a_3.$$

Escribimos los coeficientes obtenidos por columnas:

$$(a_1)_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \qquad \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \qquad (a_2)_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \qquad \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \qquad (a_3)_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \qquad \\ \\ \\ \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Calculemos $(T(a_1))_{\mathcal{B}}$, $(T(a_2))_{\mathcal{B}}$ y $(T(a_3))_{\mathcal{B}}$ usando las fórmulas (10) y (11):

$$(T(a_1))_{\mathcal{B}} = C(a_1)_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & C_{1,3} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & C_{2,3} \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c} \qquad \\ \hline \qquad \\ \hline \qquad \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \qquad \\ \\ \end{bmatrix};$$

$$(T(a_2))_{\mathcal{B}} = C(a_2)_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & C_{1,3} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & C_{2,3} \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c} \qquad \\ \hline \qquad \\ \hline \qquad \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \qquad \\ \\ \end{bmatrix};$$

$$(T(a_3))_{\mathcal{B}} = C(a_3)_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & C_{1,3} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & C_{2,3} \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c} \qquad \\ \hline \qquad \\ \hline \qquad \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \qquad \\ \\ \end{bmatrix}.$$

Juntando las columnas obtenidas escriba la matriz $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$ y haga la conclusión:

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \big[(T(a_1))_{\mathcal{B}}, (T(a_2))_{\mathcal{B}}, (T(a_3))_{\mathcal{B}}\big] = \left[\begin{array}{c|c|c} \qquad & \qquad & \qquad \\ \hline \qquad & \qquad & \qquad \end{array}\right] = \underbrace{\qquad}_{?}.$$

Usando el Ejercicio 18 como modelo, escriba el enunciado para el caso general:

20. Proposición sobre la unicidad de la matriz que representa una tranformación lineal en un par de bases. Sean $T\colon V \to W$ una transformación lineal, $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ una base de V y $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_m)$ una base de W.
Supongamos que C es una matriz de tamaño $\underbrace{\qquad\qquad}_{?}$ tal que para todo $v \in V$

$$(T(v))_{\mathcal{B}} = \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}. \tag{12}$$

Entonces

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?} = \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}. \tag{13}$$

Antes de escribir la demostración repasamos la notación e_p y una de las propiedades principales de e_p.

21. Notación: e_p es el p-ésimo vector básico de $\mathbb{R}^n$.
Recordamos que la $\underbrace{\quad}_{?}$-ésima componente de e_p es 1 y las demás componentes son $\underbrace{\quad}_{?}$.
Escriba la definición de e_p en términos de la delta de Kronecker: $e_p = \Big[\underbrace{\qquad}_{?}\Big]_{k=1}^{n}$.

22. Producto de una matriz por el vector e_p (repaso). El producto de una matriz arbitraria C de tamaño $m \times n$ por el vector e_p es igual a

$$Ce_p = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}.$$

23. Demostración de la proposición sobre la unicidad de la matriz que representa una tranformación lineal en un par de bases. Sea $j \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces

$$(a_j)_{\mathcal{A}} = \underbrace{\qquad}_{?}. \tag{14}$$

Por la definición de la matriz $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, su j-ésima columna es $\underbrace{\qquad\qquad}_{?}$,

y de (12) y (14) sigue que

$$(T(a_j))_{\mathcal{B}} = \underbrace{\qquad}_{?}\,\underbrace{\qquad}_{?} = \underbrace{\qquad\quad}_{?}.$$

Por lo tanto la j-ésima columna de $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$ coincide con la j-ésima columna de $\underbrace{\quad}_{?}$.

Como el índice j es arbitrario, acabamos de demostrar (13).