Cálculo de la matriz asociada a una transformación lineal (ejemplos)

Objetivos. Estudiar con ejemplos cómo se calcula la matriz asociada a una transformación lineal.

Requisitos. Transformación lineal, definición de la matriz asociada a una transformación lineal respecto a un par de bases, representación matricial de una transformación lineal.

1. Definición (matriz asociada a una transformación lineal respecto a un par de bases, repaso). Sean V, W espacios vectoriales de dimensiones finitas sobre un campo $\mathbb{F}$, sea $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ una base de V, sea $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_m)$ una base de W, y sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. La *matriz de T en bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{A}$* (o *matriz asociada con T respecto a las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{A}$*), denotada por $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, se define como la matriz cuyas columnas son columnas de coordenadas de los vectores $T(a_1), \ldots, T(a_n)$ en base $\mathcal{B}$:

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} (T(a_1))_{\mathcal{B}} & \ldots & (T(a_n))_{\mathcal{B}} \end{bmatrix}.$$

2. Representación matricial de una transformación lineal, repaso). Sean V, W espacios vectoriales de dimensiones finitas sobre un campo $\mathbb{F}$, sea $\mathcal{A}$ una base de V, sea $\mathcal{B}$ una base de W, sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces para todo $v \in V$ se tiene:

$$(Tv)_{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} v_{\mathcal{A}}. \tag{1}$$

La fórmula (1) se llama la *representación matricial* de T. En particular, si $W = V$ y $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, entonces

$$(Tv)_{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B}} v_{\mathcal{B}}.$$

3. Ejemplo (matriz de una transformación lineal en un espacio de polinomios). Demostrar que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla de correspondencia es una transformación lineal:

$$(Tf)(x) = (x^2 - 3x + 5)f''(x) + (x-1)f'(x) + 4f(x).$$

Calcular la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$, donde

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$

Para comprobación calcular Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escribir el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcular el producto $T_{\mathcal{E}} g_{\mathcal{E}}$.

$$g(x) = 3 - 4x + 5x^2.$$

Solución. I. Demostremos que T es lineal. Si $f, g \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, entonces

$$(f+g)' = f' + g', \qquad (f+g)'' = f'' + g'', \qquad (f+g)(x) = f(x) + g(x),$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
(T(f+g))(x) &= (x^2 - 3x + 5)(f+g)''(x) + (x-1)(f+g)'(x) + 4(f+g)(x) \\
&= (x^2 - 3x + 5)(f''(x) + g''(x)) + (x-1)(f'(x) + g'(x)) + 4(f(x) + g(x)) \\
&= \Big((x^2 - 3x + 5)f''(x) + (x-1)f'(x) + 4f(x)\Big) \\
&\qquad + \Big((x^2 - 3x + 5)g''(x) + (x-1)g'(x) + 4g(x)\Big) \\
&= (Tf)(x) + (Tg)(x).
\end{aligned}$$

Si $f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$(\lambda f)' = \lambda f', \qquad (\lambda f)'' = \lambda f'', \qquad (\lambda f)(x) = \lambda f(x),$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
(T(\lambda f))(x) &= (x^2 - 3x + 5)(\lambda f)''(x) + (x-1)(\lambda f)'(x) + 4(\lambda f)(x) \\
&= (x^2 - 3x + 5)(\lambda f''(x)) + (x-1)(\lambda f'(x)) + 4(\lambda f(x)) \\
&= \lambda\Big((x^2 - 3x + 5)f''(x) + (x-1)f'(x) + 4f(x)\Big).
\end{aligned}$$

Acabamos de demostrar que T es aditiva y homogénea.

II. Calculamos los polinomios $T(e_j)$, $j = 0, 1, 2$, y sus coordenadas respecto a la base $\mathcal{E}$:

$$\begin{aligned}
&T(e_0) = 0 + 0 + 4 = 4e_0 + 0e_1 + 0e_2;\\
&T(e_1) = 0 + (x-1) + 4x = -1 + 5x = -1e_0 + 5e_1 + 0e_2;\\
&T(e_2) = 2(x^2 - 3x + 5) + 2x(x-1) + 4x^2 = 10 - 8x + 8x^2 = 10e_0 - 8e_1 + 8e_2.
\end{aligned}$$

Escribimos $(T(e_0))_{\mathcal{E}}, (T(e_1))_{\mathcal{E}}, (T(e_2))_{\mathcal{E}}$, es decir, las columnas de coordenadas de los polinomios $T(e_0), T(e_1), T(e_2)$ respecto a la base $\mathcal{E}$ (este paso es simple y se puede omitir):

$$(T(e_0))_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad (T(e_1))_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad (T(e_2))_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 10 \\ -8 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Formamos la matriz $T_{\mathcal{E}}$ juntando las columnas $(T(e_0))_{\mathcal{E}}, (T(e_1))_{\mathcal{E}}, (T(e_2))_{\mathcal{E}}$.

$$\text{Respuesta: } T_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 10 \\ 0 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

III. Para la comprobación, consideramos el polinomio

$$g(x) = 3 - 4x + 5x^2$$

y calculemos $(T(g))_{\mathcal{E}}$ de dos maneras diferentes. Por un lado,

$$(T(g))(x) = (x^2 - 3x + 5) \cdot 10 + (x-1)(10x - 4) + 4(3 - 4x + 5x^2) = 66 - 60x + 40x^2,$$

de allí

$$(T(g))_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 66 \\ -60 \\ 40 \end{bmatrix}.$$

Por otro lado, podemos calculas $(T(g))_{\mathcal{E}}$ usando la fórmula de la representación matricial de T:

$$(T(g))_{\mathcal{E}} = T_{\mathcal{E}} g_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 10 \\ 0 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 + 4 + 50 \\ 0 - 20 - 40 \\ 0 + 0 + 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66 \\ -60 \\ 40 \end{bmatrix}. \quad \checkmark \quad \square$$

4. Ejemplo (matriz asociada a una transformación lineal que actúa en un espacio de matrices). Demostrar que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla de correspondencia es una transformación lineal:

$$T(X) = XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Hallar la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donde

$$F_1 = E_{1,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = E_{2,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$F_3 = E_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = E_{2,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$Y = \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Solución. I. Para demostrar que T es lineal usamos propiedades de las operaciones con matrices, a saber: la propiedad distributiva izquierda de la multiplicación respecto a la adición, le propiedad homogénea de la multiplicación (respecto al primer factor), y las propiedades asociativa y conmutativa de la adición.

$$T(X + \lambda Y) = (X + \lambda Y)A = XA + (\lambda Y)A = XA + \lambda YA = T(X) + T(Y).$$

II. Matriz asociada. Primero calculamos las imágenes de las matrices básicas F_1, F_2, F_3, F_4 bajo la transformación T y sus coordenadas respecto a la base $\mathcal{F}$:

$$T(F_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 3F_1 + 0F_2 - 5F_3 + 0F_4,$$

$$T(F_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = 0F_1 + 3F_2 + 0F_3 - 5F_4,$$

$$T(F_3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 4F_1 + 0F_2 + 7F_3 + 0F_4,$$

$$T(F_4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = 0F_1 + 4F_2 + 0F_3 + 7F_4.$$

Escribir las columnas de coordenadas de $T(F_1), T(F_2), T(F_3), T(F_4)$ respecto a la base $\mathcal{F}$ (este paso es muy simple y se puede omitir):

$$(T(F_1))_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (T(F_2))_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad (T(F_3))_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (T(F_4))_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

De allí por definición,

$$T_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ -5 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

III. Comprobación. Calculemos $(TY)_{\mathcal{F}}$ de dos maneras diferentes. Primero, aplicamos la definición de T:

$$T(Y) = \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9-32 & -15-42 \\ 15+4 & -25+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -23 & -57 \\ 19 & -18 \end{bmatrix}.$$

Así que

$$\big(T(Y)\big)_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} -23 \\ 19 \\ -57 \\ -18 \end{bmatrix}.$$

Por otro lado, usemos la representación matricial de T:

$$(T(Y))_{\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}} Y_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ -5 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9+0-32+0 \\ 0+15+0+4 \\ -15+0-42+0 \\ 0-25+0+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -23 \\ 19 \\ -57 \\ -18 \end{bmatrix}. \quad \checkmark \qquad \square$$