Matriz asociada a una transformación lineal respecto a un par de bases

Objetivos. Definir la matriz asociada a una transformación lineal respecto a un par de bases y estudiar la representación matricial de transformaciones lineales que actúan en espacios vectoriales de dimensión finita.

Requisitos. Transformación lineal, vector columna de coordenadas de un vector respecto a una base, multiplicación de matrices, multiplicación de una matriz por un vector.

1. Definición (matriz asociada a una transformación lineal respecto a un par de bases). Sean V, W espacios vectoriales de dimensiones finitas sobre un campo $\mathbb{F}$, sea $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ una base de V, sea $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_m)$ una base de W, y sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. La *matriz de T en bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{A}$* (o *matriz asociada con T respecto a las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{A}$*), denotada por $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, se define como la matriz cuyas columnas son columnas de coordenadas de los vectores $T(a_1), \ldots, T(a_n)$ en base $\mathcal{B}$:

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \left[\begin{array}{ccc} (T(a_1))_{\mathcal{B}} & \ldots & (T(a_n))_{\mathcal{B}} \end{array} \right].$$

En otras palabras, si

$$T(a_j) = \sum_{i=1}^{m} t_{i,j} b_i,$$

entonces

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \left[t_{i,j} \right]_{i,j=1}^{m,n}.$$

Por definición $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$, donde $m = \dim(W)$, $n = \dim(V)$. Así que el número de renglones de la matriz $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$ es igual a la dimensión del contradominio de T, y el número de columnas es igual a la dimensión del dominio de T.

2. Nota. En el caso si $W = V$ y $\mathcal{B} = \mathcal{A}$, en vez de $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$ se escribe $T_{\mathcal{A}}$.

3. Ejemplo. Sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ una base de V y sea $\mathcal{F} = (b_1, b_2)$ una base de W. Supongamos que

$$T(a_1) = 2b_1 - 3b_2, \qquad T(a_2) = 5b_2, \qquad T(a_3) = -b_1 + 4b_2.$$

Entonces

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \left[\begin{array}{rrr} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 5 & 4 \end{array} \right].$$

4. Teorema (representación matricial de una transformación lineal). Sean V, W espacios vectoriales de dimensiones finitas sobre un campo $\mathbb{F}$, sea $\mathcal{A}$ una base de V, sea $\mathcal{B}$ una base de W, sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces para todo $v \in V$ se tiene:

$$(Tv)_{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} v_{\mathcal{A}}.$$

Demostración. Usemos las siguientes notaciones para las entradas de la matriz $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$ y para las coordenadas de v respecto a la base $\mathcal{A}$:

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \left[t_{i,j}\right]_{i,j=1}^{m,n}, \qquad v_{\mathcal{A}} = \left[x_j\right]_{j=1}^{n}.$$

Esto es,

$$Ta_j = \sum_{i=1}^{m} t_{i,j} b_i, \qquad v = \sum_{j=1}^{n} x_j a_j.$$

Calculemos $T(v)$:

$$\begin{aligned} T(v) = T\left(\sum_{j=1}^{n} x_j a_j\right) &\overset{\text{(i)}}{=\!=} \sum_{j=1}^{n} x_j T(a_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} t_{i,j} b_i \\ &\overset{\text{(ii)}}{=\!=} \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} t_{i,j} x_j\right) b_i \overset{\text{(iii)}}{=\!=} \sum_{i=1}^{m} \left(T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} v_{\mathcal{A}}\right)_i b_i. \end{aligned}$$

En la igualdad (i) usamos que T es lineal, en (ii) usamos las propiedades de las operaciones en el campo $\mathbb{F}$, en (iii) usamos la definición del producto de una matriz por un vector. Al fin tenemos que

$$T(v) = \sum_{i=1}^{m} \left(T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} v_{\mathcal{A}}\right)_i b_i,$$

esto es, la i-ésima coordenada del vector $T(v)$ en base $\mathcal{B}$ es igual a la i-ésima componente del producto $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} v_{\mathcal{A}}$. Por consecuencia, $(Tv)_{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} v_{\mathcal{A}}$. □

5. Teorema (unicidad de la matriz que representa una transformación lineal respecto a un par de bases). Sean V, W espacios vectoriales de dimensiones finitas sobre un campo $\mathbb{F}$, sea $\mathcal{A}$ una base de V, sea $\mathcal{B}$ una base de W y sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Sea $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ tal que para todo $v \in V$ se cumple la siguiente igualdad:

$$(Tv)_{\mathcal{B}} = M v_{\mathcal{A}}.$$

Entonces $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = M$.

Demostración. Aplicando la hipótesis del teorema y el resultado del teorema anterior (sobre la representación matricial de una transformación lineal), obtenemos que

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} v_{\mathcal{A}} = M v_{\mathcal{A}}$$

para todo $v \in V$. Poniendo $v = a_j$ con un $j \in \{1, \ldots, n\}$ arbitrario, obtenemos que la j-ésima columna de $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$ es igual a la j-ésima columna de M. Como j es arbitrario, de aquí sigue que $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = M$. □

Ejemplos

6. Ejemplo (matriz de una transformación lineal en un espacio de polinomios). Consideremos la transformación lineal $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida por la siguiente regla de correspondencia:

$$(Tf)(x) = (x^2 - 3x + 5)f''(x) + (x-1)f'(x) + 4f(x).$$

Construyamos la matriz de T en la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$, donde

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$

Primero calculamos los polinomios $T(e_j)$, $j = 0, 1, 2$, y sus coordenadas en $\mathcal{E}$:

$$\begin{aligned}
&T(e_0) = 0 + 0 + 4 = 4e_0 + 0e_1 + 0e_2;\\
&T(e_1) = 0 + (x-1) + 4x = -1 + 5x = -1e_0 + 5e_1 + 0e_2;\\
&T(e_2) = 2(x^2 - 3x + 5) + 2x(x-1) + 4x^2 = 10 - 8x + 8x^2 = 10e_0 - 8e_1 + 8e_2.
\end{aligned}$$

Formamos la matriz $T_{\mathcal{E}}$ de los vectores de coordenadas $(T(e_0))_{\mathcal{E}}, (T(e_1))_{\mathcal{E}}, (T(e_2))_{\mathcal{E}}$.

$$\text{Respuesta: } T_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 10 \\ 0 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Para la comprobación, elijamos un polinomio $g \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, $g(x) = 3 - 4x + 5x^2$, y calculemos $(T(g))_{\mathcal{E}}$ de dos maneras diferentes. Por un lado,

$$(T(g))(x) = (x^2 - 3x + 5)\cdot 10 + (x-1)(10x - 4) + 4(3 - 4x + 5x^2) = 66 - 60x + 40x^2,$$

de allí

$$(T(g))_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 66 \\ -60 \\ 40 \end{bmatrix}.$$

Por otro lado, podemos calculas $(T(g))_{\mathcal{E}}$ usando la fórmula de la representación matricial de T:

$$(T(g))_{\mathcal{E}} = T_{\mathcal{E}} g_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 10 \\ 0 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 + 4 + 50 \\ 0 - 20 - 40 \\ 0 + 0 + 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66 \\ -60 \\ 40 \end{bmatrix}. \quad \checkmark$$

7. Ejemplo (matriz asociada a una transformación lineal que actúa en un espacio de matrices). Consideremos el mapeo $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definido por la siguiente regla de correspondencia:

$$T(X) = X \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Como el producto de matrices es aditivo y homogéneo respecto al primer argumento, T es una transformación lineal. Hallemos la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donde

$$F_1 = E_{1,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = E_{2,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$F_3 = E_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = E_{2,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Primero calculamos las imágenes de las matrices básicas F_1, F_2, F_3, F_4 bajo la transformación T y sus coordenadas respecto a la base $\mathcal{F}$:

$$T(F_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 3F_1 + 0F_2 - 5F_3 + 0F_4,$$

$$T(F_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = 0F_1 + 3F_2 + 0F_3 - 5F_4,$$

$$T(F_3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 4F_1 + 0F_2 + 7F_3 + 0F_4,$$

$$T(F_4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = 0F_1 + 4F_2 + 0F_3 + 7F_4.$$

De allí por definición,

$$T_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ -5 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Para hacer la comprobación, elijamos una matriz

$$Y = \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

y calculemos $(TY)_{\mathcal{F}}$ de dos maneras diferentes. Primero, aplicamos la definición de T:

$$T(Y) = \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9-32 & -15-42 \\ 15+4 & -25+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -23 & -57 \\ 19 & -18 \end{bmatrix}.$$

Así que

$$\big(T(Y)\big)_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} -23 \\ 19 \\ -57 \\ -18 \end{bmatrix}.$$

Por otro lado, usemos la representación matricial de T:

$$(T(Y))_{\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}} Y_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ -5 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9+0-32+0 \\ 0+15+0+4 \\ -15+0-42+0 \\ 0-25+0+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -23 \\ 19 \\ -57 \\ -18 \end{bmatrix}.$$

8. Ejemplo (derivada de polinomios). Matriz de la transformación

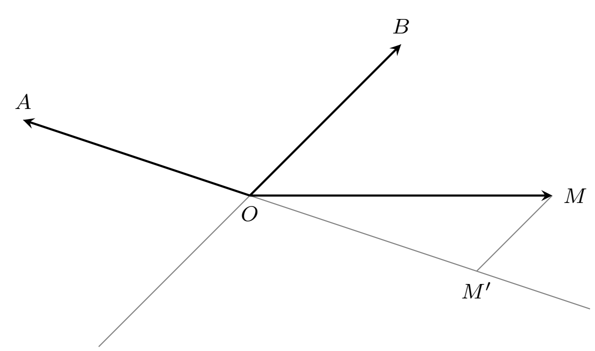
$$D\colon \mathcal{P}_d(\mathbb{F}) \to \mathcal{P}_{d-1}(\mathbb{F}), \qquad Df \coloneqq f'.$$

9. Ejemplo (operador de multiplicación por x en el espacio de polinomios). Matriz del operador de multiplicación por x,

$$T\colon \mathcal{P}_d(\mathbb{F}) \to \mathcal{P}_{d+1}(\mathbb{F}), \qquad (Tf)(x) \coloneqq xf(x).$$

10. Ejemplo. Matriz de rotación del plano por un ángulo α.

11. Ejemplo (proyección del plano sobre una recta). En el espacio $V^2(O)$ se considera una base $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ y se define P como la proyección sobre la recta OA paralelamente a la recta OB. Hay que calcular la matriz asociada a P respecto a la base $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.



En el dibujo
$P(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{OM'}$.