Propiedades de la multiplicación de matrices

Objetivos. Demostrar las propiedades del producto de matrices.

Requisitos. Definición de las operaciones con matrices, demostración de las propiedades de las operaciones lineales con matrices, sumas y sus propiedades básicas.

1. Teorema (propiedad asociativa de la multiplicación de matrices).
Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{F})$, $C \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{F})$. Entonces

$$(AB)C = A(BC).$$

Demostración. Probemos que las matrices $A(BC)$ y $(AB)C$ son del mismo tamaño:

$$\begin{tikzcd}
 & & A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F}) \arrow[dl] \arrow[ddrr] & & \\
 & AB \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{F}) \arrow[dl] & & & \\
(AB)C \in \mathcal{M}_{m\times q}(\mathbb{F}) & & B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{F}) \arrow[ul] \arrow[dr] & & A(BC) \in \mathcal{M}_{m\times q}(\mathbb{F}) \\
 & & & BC \in \mathcal{M}_{n\times q}(\mathbb{F}) \arrow[ur] & \\
 & & C \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{F}) \arrow[uull] \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Demostremos que las entradas correspondientes de las matrices $A(BC)$ y $(AB)C$ son iguales. Sean $i \in \{1,\ldots,m\}$, $j \in \{1,\ldots,q\}$. Vamos a demostrar que

$$\big((AB)C\big)_{i,j} = \big(A(BC)\big)_{i,j}. \tag{1}$$

Transformamos el lado izquierdo de la fórmula (1) usando la definición del producto de matrices y la propiedad distributiva en $\mathbb{F}$:

$$\big((AB)C\big)_{i,j} = \sum_{s=1}^{p} (AB)_{i,s} C_{s,j} = \sum_{s=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n} A_{i,k} B_{k,s} \right) C_{s,j} = \sum_{s=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} (A_{i,k} B_{k,s}) C_{s,j}.$$

Transformamos de manera similar el lado derecho de (1):

$$\big(A(BC)\big)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} (BC)_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} \sum_{s=1}^{p} B_{k,s} C_{s,j} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{p} A_{i,k} (B_{k,s} C_{s,j}).$$

En la última expresión aplicamos la propiedad asociativa de la multiplicación en $\mathbb{F}$, luego intercambiamos las sumas (usando las propiedades de las operaciones en $\mathbb{F}$):

$$\big(A(BC)\big)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{p} (A_{i,k} B_{k,s}) C_{s,j} = \sum_{s=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} (A_{i,k} B_{k,s}) C_{s,j} = \big((AB)C\big)_{i,j}. \qquad \square$$

2. Teorema (propiedad distributiva izquierda de la multiplicación de matrices respecto la adición de matrices).
Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ y sean $B, C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{F})$. Entonces

$$A(B + C) = AB + AC.$$

3. Teorema (propiedad distributiva derecha de la multiplicación de matrices respecto la adición de matrices).
Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ y sea $C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{F})$. Entonces

$$(A + B)C = AC + BC.$$

4. Teorema (propiedad homogénea de la multiplicación de matrices con respecto al primer factor).
Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$, sea $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{F})$ y sea $\lambda \in \mathbb{F}$. Demuestre que

$$(\lambda A)B = \lambda(AB).$$

5. Teorema (propiedad homogénea de la multiplicación de matrices con respecto al segundo factor).
Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$, sea $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{F})$ y sea $\lambda \in \mathbb{F}$. Demuestre que

$$A(\lambda B) = \lambda(AB).$$

6. Ejercicio. Demuestre las propiedades del producto de matrices.

7. Observación (otro método para demostrar las propiedades del producto de matrices). Más adelante, cuando vamos a estudiar las transformaciones lineales, podremos demostrar las propiedades del producto de matrices usando las propiedades de la composición de funciones. Por ejemplo, la propiedad asociativa del producto de matrices se demuestra usando la propiedad asociativa de la composición: $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.