Multiplicación de matrices por bloques

Egor Maximenko

http://www.egormaximenko.com

Seminario “Matrices y operadores”

Escuela Superior de Física y Matemáticas
Instituto Politécnico Nacional
México

2020-09-09

Plan

Notación para los componentes de una matriz

Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, $j \in \{1,\ldots,m\}$, $k \in \{1,\ldots,n\}$,
entonces A_k^j es el componente de A en el j-ésimo renglón y la k-ésima columna.

Notación para los componentes de una matriz

Si $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$, $j \in \{1, \ldots, m\}$, $k \in \{1, \ldots, n\}$,
entonces A_k^j es el componente de A en el j-ésimo renglón y la k-ésima columna.

Ejemplo.

$$A \in \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{C}), \qquad A = \begin{bmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \end{bmatrix}.$$

Submatrices

$$A = \begin{bmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 & A_4^1 & A_5^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 & A_4^2 & A_5^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 & A_4^3 & A_5^3 \end{bmatrix},$$

Submatrices

$$A = \begin{bmatrix} A^1_1 & A^1_2 & A^1_3 & A^1_4 & A^1_5 \\ A^2_1 & A^2_2 & A^2_3 & A^2_4 & A^2_5 \\ A^3_1 & A^3_2 & A^3_3 & A^3_4 & A^3_5 \end{bmatrix}, \qquad A^{1,3}_{2,3,5} =$$

Submatrices

$$A = \begin{bmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 & A_4^1 & A_5^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 & A_4^2 & A_5^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 & A_4^3 & A_5^3 \end{bmatrix}, \qquad A_{2,3,5}^{1,3} =$$

Submatrices

$$A = \begin{bmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 & A_4^1 & A_5^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 & A_4^2 & A_5^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 & A_4^3 & A_5^3 \end{bmatrix}, \qquad A_{2,3,5}^{1,3} = \begin{bmatrix} A_2^1 & A_3^1 & A_5^1 \\ A_2^3 & A_3^3 & A_5^3 \end{bmatrix}$$

En general, si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$,

$$1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_p \leq m, \quad 1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_q \leq n,$$

Submatrices

$$A = \begin{bmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 & A_4^1 & A_5^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 & A_4^2 & A_5^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 & A_4^3 & A_5^3 \end{bmatrix}, \qquad A_{2,3,5}^{1,3} = \begin{bmatrix} A_2^1 & A_3^1 & A_5^1 \\ A_2^3 & A_3^3 & A_5^3 \end{bmatrix}$$

En general, si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$,

$1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_p \le m, \quad 1 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_q \le n,$

$$A_{k_1,\ldots,k_q}^{j_1,\ldots,j_p} := \left[A_{k_s}^{j_r}\right]_{r,s=1}^{p,q}.$$

Plan

Partición de una matriz en bloques

$$A = \begin{array}{r c} & \begin{array}{cc} \overbrace{\qquad\quad}^{s} & \overbrace{\qquad\quad}^{n-s} \end{array} \\ \begin{array}{r} r\,\{ \\ m-r\,\{ \end{array} & \begin{bmatrix} \quad E & \qquad F \quad \\ \quad G & \qquad H \quad \end{bmatrix} \end{array}.$$

$$\begin{aligned}
A_{1,\dots,s}^{1,\dots,r} &= E, & A_k^j &= E_k^j & &(1 \le j \le r, \quad 1 \le k \le s),\\
A_{s+1,\dots,n}^{1,\dots,r} &= F, & A_k^j &= F_{k-s}^j & &(1 \le j \le r, \quad s+1 \le k \le n),\\
A_{1,\dots,s}^{r+1,\dots,m} &= G, & A_k^j &= G_k^{j-r} & &(r+1 \le j \le m, \quad 1 \le k \le s),\\
A_{s+1,\dots,n}^{r+1,\dots,m} &= H, & A_k^j &= F_{k-s}^{j-r} & &(r+1 \le j \le m, \quad s+1 \le k \le n).
\end{aligned}$$

Plan

Multiplicación de matrices por bloques

Proposición

Sean

$$A = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} V & W \\ X & Y \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$AB = \begin{bmatrix} EV + FX & EW + FY \\ GV + HX & GW + HY \end{bmatrix}.$$

Otra forma de la misma regla

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A^{1,\ldots,r}_{1,\ldots,s} & A^{1,\ldots,r}_{s+1,\ldots,n} \\ \hline A^{r+1,\ldots,m}_{1,\ldots,s} & A^{r+1,\ldots,m}_{s+1,\ldots,n} \end{array}\right], \qquad B = \left[\begin{array}{c|c} B^{1,\ldots,s}_{1,\ldots,t} & B^{1,\ldots,s}_{t+1,\ldots,p} \\ \hline B^{s+1,\ldots,n}_{1,\ldots,t} & B^{s+1,\ldots,n}_{t+1,\ldots,p} \end{array}\right].$$

Entonces

$$(AB)^{1,\ldots,r}_{1,\ldots,t} = A^{1,\ldots,r}_{1,\ldots,s} B^{1,\ldots,s}_{1,\ldots,t} + A^{1,\ldots,r}_{s+1,\ldots,n} B^{s+1,\ldots,n}_{1,\ldots,t},$$

$$(AB)^{1,\ldots,r}_{t+1,\ldots,p} = A^{1,\ldots,r}_{1,\ldots,s} B^{1,\ldots,s}_{t+1,\ldots,p} + A^{1,\ldots,r}_{s+1,\ldots,n} B^{s+1,\ldots,n}_{t+1,\ldots,p},$$

$$(AB)^{r+1,\ldots,m}_{1,\ldots,t} = A^{r+1,\ldots,m}_{1,\ldots,s} B^{1,\ldots,s}_{1,\ldots,t} + A^{r+1,\ldots,m}_{s+1,\ldots,n} B^{s+1,\ldots,n}_{1,\ldots,t},$$

$$(AB)^{r+1,\ldots,m}_{t+1,\ldots,p} = A^{r+1,\ldots,m}_{1,\ldots,s} B^{1,\ldots,s}_{t+1,\ldots,p} + A^{r+1,\ldots,m}_{s+1,\ldots,n} B^{s+1,\ldots,n}_{t+1,\ldots,p}.$$

Demostremos que

$$\underbrace{(AB)^{1,\dots,r}_{t+1,\dots,p}}_{L} = \underbrace{A^{1,\dots,r}_{1,\dots,s} B^{1,\dots,s}_{t+1,\dots,p} + A^{1,\dots,r}_{s+1,\dots,n} B^{s+1,\dots,n}_{t+1,\dots,p}}_{R}.$$

L y R son matrices $r \times (p-t)$.

$$\begin{aligned}
L^j_k = (AB)^j_{t+k} = \sum_{u=1}^{n} A^j_u B^u_{t+k} &= \sum_{u=1}^{s} A^j_u B^u_{t+k} + \sum_{u=s+1}^{n} A^j_u B^u_{t+k} \\
&= \sum_{u=1}^{s} A^j_u B^u_{t+k} + \sum_{v=1}^{n-s} A^j_{v+s} B^{v+s}_{t+k} \\
&= \sum_{u=1}^{s} (A^{1,\dots,r}_{1,\dots,s})^j_u (B^{1,\dots,s}_{t+1,\dots,p})^u_k + \sum_{v=1}^{n-s} (A^{1,\dots,r}_{s+1,\dots,n})^j_v (B^{s+1,\dots,n}_{t+1,\dots,p})^v_k = R^j_k.
\end{aligned}$$

Plan

Ejemplo: el producto de dos matrices triangulares inferiores por bloques

$$\begin{bmatrix} E & 0_{r\times(n-s)} \\ G & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V & 0_{(n-s)\times(p-t)} \\ X & Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EV & 0_{r\times(p-t)} \\ GV + HX & HY \end{bmatrix}.$$

Ejemplo: en el producto de una matriz por un vector separar el último renglón y la última columna

$$M = \begin{bmatrix} A & u \\ v^\top & \omega \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} y \\ \zeta \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$Mx = \begin{bmatrix} Ay + u\zeta \\ v^\top y + \omega\zeta \end{bmatrix}.$$

Ejemplo: multiplicación de matrices diagonales por bloques

$$\left[\begin{array}{c|c|c} P_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & P_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & P_3 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c|c} Q_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & Q_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & Q_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c} P_1 Q_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & P_2 Q_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & P_3 Q_3 \end{array}\right].$$

Aquí se usa una versión más general de la regla.

Algunas aplicaciones

- Una demostración del teorema de Jacobi sobre el menor complementario.
- Inversión de matrices por bloques:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}BS^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BS^{-1} \\ -S^{-1}CA^{-1} & S^{-1} \end{bmatrix}, \quad S := D - CA^{-1}B.$$

- Fórmula para la inversa de la suma (Woodbury):

$$(A + UCV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U\left(C^{-1} + VA^{-1}U\right)^{-1} VA^{-1}.$$

- El algoritmo de Strassen para multiplicar matrices.