Ecuaciones matriciales $AX = B$ y $XA = B$. Cálculo de la matriz inversa

Objetivos. Aprender a resolver ecuaciones matriciales de la forma $AX = B$ y $XA = B$. Aprender a calcular la matriz inversa con la eliminación de Gauss–Jordan.

Requisitos. Eliminación de Gauss–Jordan, matrices elementales, criterio de invertibilidad de una matriz cuadrada en términos de matrices elementales.

Solución de la ecuación $AX = B$

1. Esquema para resolver la ecuación $AX = B$.

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right] \overset{izq}{\sim} \left[\begin{array}{c|c} I & X \end{array}\right].$$

Consideremos la ecuación matricial de forma

$$AX = B,$$

donde $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{F})m$ y $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ son las matrices dadas, X es la matriz incógnita de clase $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$.

Supongamos que la matriz A es invertible. Como ya sabemos, esto significa que A se puede transformar en la matriz identidad I_m al aplicar algunas operaciones elementales de filas. Sean $E_1, \ldots, E_k$ matrices elementales tales que $E_k \cdots E_1 A = I_m$. Multipliquemos la ecuación inicial $AX = B$ del lado izquierdo por la matriz E_1, luego por E_2, etc.:

$$E_k \cdots E_1 AX = E_k \cdots E_1 B.$$

De aquí

$$X = E_k \cdots E_1 B.$$

Esta idea se realiza en el siguiente algoritmo: a la matriz A se aplican operaciones elementales por filas que la transforman en la matriz identidad. Las mismas operaciones elementales por filas se aplican a la matriz B. Entonces al final la matriz B se convierte en la solución X. Para hacer las mismas operaciones elementales por filas con A y B es cómodo trabajar con la *matriz aumentada* $\left[\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right]$.

2. Observación. Si A no es invertible ($\Leftrightarrow$ A no se puede reducir a la matriz identidad al aplicar transformaciones elementales de filas), es posible demostrar que hay dos casos posibles: i) $AX = B$ no tiene solución o ii) $AX = B$ tiene más de una solución. Nosotros no vamos a estudiar esta situación.

3. Ejemplo. Resolvamos la ecuación matricial y hagamos la comprobación:

$$\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -8 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Demostración. Solución La ecuación es de forma $AX = B$, donde X es la matriz incógnita. Como A es de tamaño 2×2 y B es de tamaño 2×3, X tiene que ser de tamaño 2×3. Escribamos la matriz aumentada $\left[\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right]$. Haciendo las operaciones elementales de filas con esta matriz aumentada, intentaremos reducir la matriz A a la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{rr|rrr} 7 & -2 & 4 & 1 & -1 \\ -8 & 3 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \mathrel{+}= R_2} \left[\begin{array}{rr|rrr} -1 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ -8 & 3 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1 \mathrel{*}= (-1)} \left[\begin{array}{rr|rrr} 1 & -1 & -3 & -2 & -3 \\ -8 & 3 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \mathrel{+}= 8R_1} \left[\begin{array}{rr|rrr} 1 & -1 & -3 & -2 & -3 \\ 0 & -5 & -25 & -15 & -20 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \mathrel{*}= -\frac{1}{5}} \left[\begin{array}{rr|rrr} 1 & -1 & -3 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \mathrel{+}= R_2} \left[\begin{array}{rr|rrr} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{array}\right].$$

Ahora la matriz es de forma $\left[\begin{array}{c|c} I & X \end{array}\right]$, y la respuesta es

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Comprobación:

$$\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -8 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 - 10 & 7 - 6 & 7 - 8 \\ -16 + 15 & -8 + 9 & -8 + 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}. \quad \checkmark \quad \square$$

4. Ejemplos.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

5. Ejercicio. Resuelva la ecuación matricial y haga la comprobación:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 8 \\ 7 & -5 & 1 \\ -3 & 3 & 9 \end{bmatrix}.$$

Cálculo de la matriz inversa

6. Esquema para calcular la matriz inversa. Calcular la matriz inversa significa resolver la ecuación $AX = I$. Aplicamos el mismo algoritmo:

$$\left[\ A \mid I\ \right] \overset{izq}{\sim} \left[\ I \mid X\ \right].$$

7. Ejemplo (cálculo de la matriz inversa). Calculemos la matriz inversa a la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 4 & -5 & 3 \\ -3 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Solución.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 5 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 -= R_2} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 += 3R_1]{R_2 += (-4)R_1}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -17 & 7 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 12 & -5 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 += R_3} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 12 & -5 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 += 2R_2}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 *= (-1)} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 += (-2)R_3]{R_1 += R_3}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 *= (-1)} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 & -7 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 += 2R_2]{R_1 += (-1)R_2}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -9 & -17 \end{array}\right].$$

De allí

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -4 & -7 \\ -3 & -9 & -17 \end{bmatrix}.$$

Comprobación:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 4 & -5 & 3 \\ -3 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -4 & -7 \\ -3 & -9 & -17 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5+2-6 & 10+8-18 & 20+14-34 \\ 4+5-9 & 8+20-27 & 16+35-51 \\ -3-3+6 & -6-12+18 & -12-21+34 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \checkmark \qquad \square$$

8. Ejemplos. Calcular las matrices inversas:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

9. Ejemplo. Calculemos la matriz inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Solución.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 -= R_1} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 += (-4)R_1]{R_2 += (-2)R_1} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & 4 & -4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{R_2 *= \left(-\frac{1}{5}\right) \\ R_3 *= \left(-\frac{1}{5}\right)}}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{4}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 -= R_2} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right].$$

La última matriz izquierda,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tiene una fila nula y por eso no es invertible. Como $A \overset{\text{izq}}{\sim} B$, la matriz inicial A tampoco es invertible.

Otro razonamiento. Consideramos nuestra ecuación $AX = I$ como tres sistemas de ecuaciones lineales con la misma matriz del sistema. En la parte izquierda obtuvimos una fila nula, y la fila correspondiente de la parte derecha no es nula. Por eso no hay solución (no existe X tal que $AX = I$). $\square$

10. Ejercicios (matrices inversas). Calcule las matrices inversas y haga las comprobaciones:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 10 & -2 \end{bmatrix}.$$

11. Ejercicios (matrices inversas). Calcule las matrices inversas y haga las comprobaciones:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 9 & 0 & -1 \\ -2 & -7 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -4 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \\ -5 & -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

12. Definición (matriz con diagonal estrictamente dominante). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Se dice que la diagonal (principal) de A es *estrictamente dominante* si

$$|A_{i,i}| > \sum_{\substack{1 \le j \le n \\ j \ne i}} |A_{i,j}| \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\},$$

esto es, en todo renglón de la matriz A el valor absoluto de la entrada diagonal es estrictamente mayor que la suma de los valores absolutos de las demás entradas.

13. Tarea adicional. Demuestre que toda matriz con diagonal estrictamente dominante es invertible.

Solución de la ecuación $XA = B$

14. Esquema para resolver la ecuación $XA = B$ usando operaciones elementales de columnas.

$$\left[\begin{array}{c} A \\ \hline B \end{array}\right] \overset{der}{\sim} \left[\begin{array}{c} I \\ \hline X \end{array}\right].$$

15. Esquema para resolver la ecuación $XA = B$ usando matrices transpuestas.

$$\left[\; A^\top \mid B^\top \;\right] \overset{\text{izq}}{\sim} \left[\; I \mid X^\top \;\right].$$

16. Ejemplo.

$$X \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 9 & -2 \\ -3 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

17. Ejercicio. Resuelva las ecuación matricial y haga la comprobación:

$$X \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 5 \\ 7 & 7 & 1 \\ 3 & 9 & 5 \end{bmatrix}.$$