# Propiedades de las operaciones lineales con matrices

**Ejercicios**

**Objetivos.** Aprender a demostrar propiedades de las operaciones lineales en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

**Requisitos.** Operaciones lineales en $\mathbb{R}^n$, definición de operaciones con matrices, matrices con entradas definidas por medio de fórmulas.

Denotamos por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ al conjunto de las matrices de tamaño $m\times n$ con entradas reales. Las operaciones lineales en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ se definen entrada por entrada, y sus propiedades se demuestran casi de la misma manera que en $\mathbb{R}^n$.

## Dos estilos de trabajar con matrices

**Primer estilo: trabajar con matrices indicando el tamaño y la fórmula para las entradas.** La matriz $m \times n$ con entradas $A_{i,j}$ se denota por $\left[A_{i,j}\right]_{i,j=1}^{m,n}$.

**1.** Sea $A = \left[A_{i,j}\right]_{i,j=1}^{m,n} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$.

Establezca correspondencias exactas entre las notaciones y sus significados:

$\boxed{\left[\lambda A_{i,j}\right]_{i,j=1}^{m,n}}$ $\qquad$ $\boxed{\text{producto de } \lambda \text{ por } \left[A_{i,j}\right]_{i,j=1}^{m,n}}$

$\boxed{\lambda\left[A_{i,j}\right]_{i,j=1}^{m,n}}$ $\qquad$ $\boxed{\text{matriz } m \times n \text{ con entradas } \lambda A_{i,j}}$

**2.** Sea $A = \left[A_{i,j}\right]_{i,j=1}^{m,n} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$.

Explique por qué $\lambda\left[A_{i,j}\right]_{i,j=1}^{m,n} = \left[\lambda A_{i,j}\right]_{i,j=1}^{m,n}$:

○ por la propiedad conmutativa en $\mathbb{R}$

○ por la propiedad conmutativa en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$

○ por la definición del producto de una matriz por un escalar

○ por la propiedad distributiva

**Segundo estilo: primero indicar los tamaños y luego trabajar con una entrada.** Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y una par de índices $(i,j)$, donde $i \in \{1,\ldots,m\}$ y $j \in \{1,\ldots,n\}$, se denota por $A_{i,j}$ la entrada de la matriz $A$ con índices $i,j$.

**3.** Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y sean $i \in \{1,\ldots,m\}$, $j \in \{1,\ldots,n\}$.

Establezca las correspondencias exactas entre las notaciones y sus significados:

| | |
|---|---|
| $(\lambda A)_{i,j}$ | $\lambda$ multiplicado por la $(i,j)$-ésima entrada de $A$ |
| $\lambda A_{i,j}$ | $(i,j)$-ésima entrada del producto de $\lambda$ por $A$ |

**4.** Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y sean $i \in \{1,\ldots,m\}$, $j \in \{1,\ldots,n\}$.

Explique por qué $(\lambda A)_{i,j} = \lambda A_{i,j}$:

- ○ por las propiedades de subíndices
- ○ por la propiedad conmutativa en $\mathbb{R}$
- ○ por la propiedad conmutativa en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$
- ○ por la definición del producto de una matriz por un escalar

**5.** Sea $A = \left[A_{i,j}\right]_{i,j=1}^{m,n}$ y sea $B = \left[B_{i,j}\right]_{i,j=1}^{m,n}$.

Establezca las correspondencias exactas entre las notaciones y sus significados:

| | |
|---|---|
| $\left[A_{i,j}\right]_{i,j=1}^{m,n} + \left[B_{i,j}\right]_{i,j=1}^{m,n}$ | suma de las matrices $\left[A_{i,j}\right]_{i,j=1}^{m,n}$ y $\left[B_{i,j}\right]_{i,j=1}^{m,n}$ |
| $\left[A_{i,j} + B_{i,j}\right]_{i,j=1}^{m,n}$ | matriz $m \times n$ con entradas $A_{i,j} + B_{i,j}$ |

**6.** Sea $A = \left[A_{i,j}\right]_{i,j=1}^{m,n}$ y sea $B = \left[B_{i,j}\right]_{i,j=1}^{m,n}$.

Explique por qué se cumple la igualdad $\left[A_{i,j}\right]_{i,j=1}^{m,n} + \left[B_{i,j}\right]_{i,j=1}^{m,n} = \left[A_{i,j} + B_{i,j}\right]_{i,j=1}^{m,n}$:

- ○ por la propiedad distributiva en $\mathbb{R}$
- ○ por la definición de la suma en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$
- ○ por la propiedad conmutativa de la suma en $\mathbb{R}$
- ○ por la propiedad conmutativa de la suma en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$

**7.** Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y sean $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Establezca las correspondencias exactas entre las notaciones y sus significados:

| | |
|---|---|
| $A_{i,j} + B_{i,j}$ | $(i, j)$-ésima entrada de la suma $A$ y $B$ |
| $(A + B)_{i,j}$ | suma de las $(i, j)$-ésimas entradas de $A$ y $B$ |

**8.** Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y sean $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Explique por qué $(A + B)_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}$:

- ○ por la definición de la suma en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$
- ○ por la propiedad distributiva en $\mathbb{R}$
- ○ por la propiedad conmutativa de la suma en $\mathbb{R}$
- ○ por las propiedades generales de los subíndices

## Definición de las operaciones lineales en $\boldsymbol{\mathcal{M}_{m\times n}}(\mathbb{R})$

**9.** Sea $A = \big[A_{i,j}\big]_{i,j=1}^{m,n}$ y sea $B = \big[B_{i,j}\big]_{i,j=1}^{m,n}$.
Entonces por definición

$$A + B \coloneqq \big[\qquad\qquad\big]_{i,j=}\quad .$$

**10.** Sea $A = \big[A_{i,j}\big]_{i,j=1}^{m,n}$ y sea $B = \big[B_{i,j}\big]_{i,j=1}^{m,n}$.
Entonces por definición

$$A + B \in \underbrace{\qquad\qquad}_{?}$$

y para todo par de índices $(i,j)$ donde

$$i \in \{1,\ldots,\underbrace{\quad}_{?}\},\qquad j \in \{1,\ldots,\underbrace{\quad}_{?}\},$$

se cumple la igualdad

$$(A+B)_{i,j} = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}$$

**11.** Sea $A = \big[A_{i,j}\big]_{i,j=1}^{m,n} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$.
Entonces por definición

$$\lambda A \coloneqq \big[\qquad\qquad\big]_{i,j=}\quad .$$

**12.** Sea $A = \big[A_{i,j}\big]_{i,j=1}^{m,n} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$.
Entonces por definición

$$\lambda A \in \underbrace{\qquad\qquad}_{?}$$

y para todo par de índices $(i,j)$ donde

$$i \in \underbrace{\qquad\qquad}_{?},\qquad j \in \underbrace{\qquad\qquad}_{?}$$

se cumple la igualdad

$$(\lambda A)_{i,j} = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}$$

## Demostración de la propiedad de multiplicación por 1 en $\boldsymbol{\mathcal{M}_{m\times n}}(\mathbb{R})$

**13.** Primero recordamos la propiedad principal de 1 en $\mathbb{R}$:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad 1\alpha = \underbrace{\qquad}_{?}$$

**14.** Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Demuestre que

$$1A = A. \tag{1}$$

*Primera demostración.* Denotamos las entradas de $A$ por $A_{i,j}$: $\quad A = \big[A_{i,j}\big]_{i,j=1}^{m,n}$.

Vamos a transformar la expresión $1A$ en $A$:

$$1A \overset{\text{(i)}}{=\!=} 1\big[A_{i,j}\big]_{i,j=1}^{m,n} \overset{\text{(ii)}}{=\!=} \big[\qquad\quad\big]_{i,j=1} \overset{\text{(iii)}}{=\!=} \big[\qquad\quad\big]_{i,j=1} \overset{\text{(iv)}}{=\!=} A.$$

Justificación de los pasos:

(i) Notación para las entradas de $A$.

(ii) Definición del producto por escalar en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

(iii)

(iv) $\square$

*Segunda demostración.* Primero verifiquemos que las matrices $1A$ y $A$ son del mismo tamaño. Por la definición del producto por escalar en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ obtenemos lo siguiente:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})} \arrow[dr] & \\
& \boxed{1A \in \qquad\qquad} \\
\boxed{1 \in \mathbb{R}} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Luego elijamos un par de índices arbitrarios $(i,j)$ donde $i \in \{1,\ldots,\underbrace{\qquad}_{?}\}$, $j \in \{1,\ldots,\underbrace{\qquad}_{?}\}$,

y demostramos que la $(i,j)$-ésima entrada de la matriz $1A$

es igual a la $(i,j)$-ésima entrada de la matriz $A$.

$$\big(1A\big)_{i,j} \overset{\text{(i)}}{=\!=} \qquad\qquad\qquad \overset{\text{(ii)}}{=\!=} A_{i,j}.$$

Justificación:

(i)

(ii) $\square$

## Demostración de la propiedad distributiva de la multiplicación por escalares en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ con respecto a la adición en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$

**15.** Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Demuestre que

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B. \tag{2}$$

*Primera demostración.* Usamos la siguiente notación para las entradas de las matrices $A$ y $B$:

$$A = \big[A_{i,j}\big]_{i,j=1}^{m,n}, \qquad B = \big[B_{i,j}\big]_{i,j=1}^{m,n}.$$

Vamos a transformar la expresión $\lambda(A + B)$ que está escrita en el lado izquierdo de la fórmula (2) en la expresión $\lambda A + \lambda B$ escrita en el lado derecho de la misma fórmula.

$$\begin{aligned}
\lambda(A+B) &\overset{\text{(i)}}{=\!=} \lambda\Big(\big[A_{i,j}\big]_{i,j=1}^{m,n} + \qquad\qquad\Big) \\
&\overset{\text{(ii)}}{=\!=} \lambda\Big[\qquad\qquad\Big]_{i,j=1} \\
&\overset{\text{(iii)}}{=\!=} \Big[\lambda\big(A_{i,j} + B_{i,j}\big)\Big]_{i,j=} \\
&\overset{\text{(iv)}}{=\!=} \Big[\qquad\qquad\qquad\Big]_{i,j=} \\
&\overset{\text{(v)}}{=\!=} \Big[\qquad\qquad\Big]_{i,j=} + \Big[\qquad\qquad\Big]_{i,j=} \\
&\overset{\text{(v)}}{=\!=} \\
&\overset{\text{(vi)}}{=\!=} \lambda A + \lambda B.
\end{aligned}$$

Justificación:

(i)

(ii)

(iii)

(iv)

(v) Definición de la suma en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

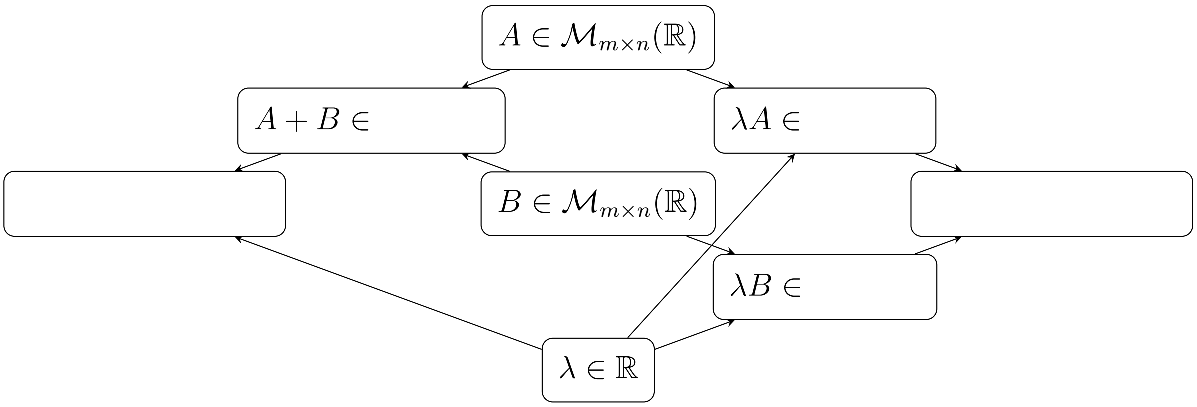
(vi)

(vii) Notación para las entradas de las matrices $A$ y $B$. $\square$

**16.** Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Demuestre que

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B. \tag{3}$$

*Segunda demostración.* Primero verifiquemos que las matrices $\lambda(A + B)$ y $\lambda A + \lambda B$ son del mismo tamaño. Por la definición de las operaciones lineales en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ obtenemos lo siguiente:




Ahora elijamos un par arbitrario $(i, j)$ de índices, donde $i \in \underbrace{\qquad\qquad}_{?}$, $\quad j \in \underbrace{\qquad\qquad}_{?}$,

y demostremos que la $(i, j)$-ésima entrada de $\lambda(A + B)$ es igual a la $(i, j)$-ésima entrada de $\lambda A + \lambda B$.

$$\begin{aligned}
\Big(\lambda(A + B)\Big)_{i,j} &\overset{\text{(i)}}{=\!=} \lambda\big(\qquad\qquad\big)_{i,j} \\
&\overset{\text{(ii)}}{=\!=} \lambda\big(\qquad\qquad\qquad\qquad\big) \\
&\overset{\text{(iii)}}{=\!=} \\
&\overset{\text{(iv)}}{=\!=} \big(\qquad\qquad\big)_{i,j} + \big(\qquad\qquad\big)_{i,j} \\
&\overset{\text{(v)}}{=\!=} \Big(\qquad\qquad\qquad\Big)_{i,j}.
\end{aligned}$$

Justificación:

(i) Definición del producto por escalar en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

(ii)

(iii)

(iv)

(v) Definición de la suma en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. $\square$