Propiedades de las operaciones lineales con matrices

1. Teorema (propiedades de las operaciones lineales con matrices).
Sean $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ tres matrices del mismo tamaño, y sean $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$. Entonces:

1. $(A + B) + C = A + (B + C)$.
2. $A + \mathbf{0}_{m,n} = A, \quad \mathbf{0}_{m,n} + A = A$.
3. $A + (-A) = \mathbf{0}_{m,n}, \quad (-A) + A = \mathbf{0}_{m,n}$.
4. $A + B = B + A$.
5. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.
6. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.
7. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.
8. $1A = A$.

Estas propiedades se demuestran de la misma manera que las propiedades de las operaciones lineales en $\mathbb{F}^n$ (o en $\mathbb{R}^n$).

Demostración de la propiedad conmutativa de la adición en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$. Tenemos por demostrar que

$$A + B = B + A.$$

Por la definición de la suma de dos matrices, $A + B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ y $B + A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$, así que las matrices A y B son del mismo tamaño. Probemos que sus entradas correspondientes son iguales. Para cualquier par de índices (i, j) con $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ tenemos la siguiente cadena de igualdades:

$$(A + B)_{i,j} \quad \overset{(1)}{=\!=} \quad A_{i,j} + B_{i,j} \quad \overset{(2)}{=\!=} \quad B_{i,j} + A_{i,j} \quad \overset{(3)}{=\!=} \quad (B + A)_{i,j}.$$

En las igualdades (1) y (3) se aplica la definición de la suma de matrices, y en el paso (2) se usa la propiedad conmutativa de la adición en $\mathbb{F}$. $\square$

2. Ejercicio. Demostrar otros incisos del teorema.