Matrices con entradas definidas mediante fórmulas

Objetivos. Conocer dos notaciones que se usan para definir matrices mediante fórmulas.

Requisitos. Vectores definidos mediante fórmulas, el símbolo delta de Kronecker.

1. Notación. La notación $A = \big[f(i,j)\big]_{i,j=1}^{m,n}$ significa que A es una matriz de tamaño $m \times n$ tal que su entrada ubicada el i-ésimo renglón y j-ésima columna es igual a $f(i,j)$, para todo $i \in \{1,\ldots,m\}$ y todo $j \in \{1,\ldots,n\}$. Aquí f es una función de dos argumentos, por lo común dada por una fórmula con variables i y j.

2. Ejemplo. $$\Big[\,(i+10)\cos(j)\,\Big]_{i,j=1}^{3,2} = \begin{bmatrix} 11\cos(1) & 11\cos(2) \\ 12\cos(1) & 12\cos(2) \\ 13\cos(1) & 13\cos(2) \end{bmatrix}.$$

3. En situaciones más complicadas se recomienda escribir de manera explícita los índices (i,j) de cada entrada y luego aplicar la fórmula $f(i,j)$:

$$\Big[\,(j+1)^2\ln(i+2)\,\Big]_{i,j=1}^{2,3} = \left[\begin{array}{c|c|c} \overset{i=1,\ j=1}{4\ln(3)} & \overset{i=1,\ j=2}{9\ln(3)} & \overset{i=1,\ j=3}{16\ln(3)} \\ \hline \overset{i=2,\ j=1}{4\ln(4)} & \overset{i=2,\ j=2}{9\ln(4)} & \overset{i=2,\ j=3}{16\ln(4)} \end{array}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} 4\ln(3) & 9\ln(3) & 16\ln(3) \\ 4\ln(4) & 9\ln(4) & 16\ln(4) \end{bmatrix}.$$

4. Los índices de renglones y columnas son variables mudas y no necesariamente se denotan por i y j:

$$\Big[\,(u+3)^c\,\Big]_{u,c=1}^{2,3} = \left[\begin{array}{c|c|c} \overset{u=1,\ c=1}{4^1} & \overset{u=1,\ c=2}{4^2} & \overset{u=1,\ c=3}{4^3} \\ \hline \overset{u=2,\ c=1}{5^1} & \overset{u=2,\ c=2}{5^2} & \overset{u=2,\ c=3}{5^3} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 4 & 16 & 64 \\ 5 & 25 & 125 \end{bmatrix}.$$

5. Notación para matrices cuadradas. En vez de $\left[\ f(i,j)\ \right]_{i,j=1}^{n,n}$ se escribe $\left[\ f(i,j)\ \right]_{i,j=1}^{n}$. Por ejemplo,

$$\left[\ 2^a\ \cos(b)\ \right]_{a,b=1}^{3} = \begin{bmatrix} 2\cos(1) & 2\cos(2) & 2\cos(3) \\ 4\cos(1) & 4\cos(2) & 4\cos(3) \\ 8\cos(1) & 8\cos(2) & 8\cos(3) \end{bmatrix}.$$

6. $$\left[\ \min\{i,j\}\ \right]_{i,j=1}^{3} = \begin{bmatrix} \min\{1,1\} & \min\{1,2\} & \min\{1,3\} \\ \min\{2,1\} & \min\{2,2\} & \min\{2,3\} \\ \min\{3,1\} & \min\{3,2\} & \min\{3,3\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

7. Puede suceder que las entradas de una matriz dependen sólo del índice de renglón o del índice de columna. Para no confundirnos, escribimos los índices de cada entrada y aplicamos la fórmula:

$$\left[\ (j+5)^2\ \right]_{i,j=1}^{2,3} = \left[\begin{array}{c|c|c} \overset{i=1,\ j=1}{6^2} & \overset{i=1,\ j=2}{7^2} & \overset{i=1,\ j=3}{8^2} \\ \hline \overset{i=2,\ j=1}{6^2} & \overset{i=2,\ j=2}{7^2} & \overset{i=2,\ j=3}{8^2} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 36 & 49 & 64 \\ 36 & 49 & 64 \end{bmatrix}.$$

8. $$\left[\ 5\delta_{i,2}\ \right]_{i,j=1}^{3} = \begin{bmatrix} 5\delta_{1,2} & 5\delta_{1,2} & 5\delta_{2,2} \\ 5\delta_{2,2} & 5\delta_{2,2} & 5\delta_{2,2} \\ 5\delta_{3,2} & 5\delta_{3,2} & 5\delta_{3,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

9. Otro estilo de definir matrices. Una matriz se puede definir al especificar su tamaño y escribir una fórmula $f(i,j)$ para su (i,j)-ésima entrada. Como siempre, el primer índice denota al número del renglón, y el segundo índice de la columna.

10. Sea $A \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $A_{i,j} = 20i + j$. Entonces $A = \begin{bmatrix} 21 & 22 \\ 41 & 42 \\ 61 & 62 \end{bmatrix}$.

11. Sea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ con $A_{p,q} = \dfrac{p}{q+1}$. Entonces $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$.

12. $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $\quad A_{i,j} = \delta_{i,3} + \delta_{j,1}$.

$$A = \begin{bmatrix} \delta_{1,3}+\delta_{1,1} & \delta_{1,3}+\delta_{2,1} & \delta_{1,3}+\delta_{3,1} \\ \delta_{2,3}+\delta_{1,1} & \delta_{2,3}+\delta_{2,1} & \delta_{2,3}+\delta_{3,1} \\ \delta_{3,3}+\delta_{1,1} & \delta_{3,3}+\delta_{2,1} & \delta_{3,3}+\delta_{3,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$