Dos transformaciones lineales asociadas a una forma bilineal

Objetivos. Definir transformaciones lineales asociadas a una forma bilineal y estudiar sus propiedades básicas.

Requisitos. Formas bilineales, funcionales lineales, espacio dual, base dual.

1. Definición de las transformaciones L_f y R_f. Sea V un EV/$\mathbb{R}$ de dimensión finita y sea $f \in \mathcal{BL}(V)$. Las transformaciones lineales $L_f \colon V \to V^*$ y $R_f \colon V \to V^*$ se definen mediante las reglas:

$$(L_f a)(b) = f(a, b), \qquad (R_f b)(a) = f(a, b).$$

2. Ejemplo. Sea $f \colon (\mathbb{R}^2)^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} x_1, x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 3x_1y_1 - 7x_1y_2 + 2x_2y_1 + 8x_2y_2.$$

Sea $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Entonces

$$(R_f e_1)(x) = 3x_1 + 2x_2, \qquad (R_f e_2)(x) = -7x_1 + 8x_2.$$

Recordamos que la base dual $\mathcal{E}^* = (\theta_1, \theta_2)$ consiste en los funcionales que calculan las coordenadas de los vectores en la base $\mathcal{E}$:

$$\theta_1(x) = x_1, \qquad \theta_2(x) = x_2.$$

Por lo tanto, podemos escribir las igualdades anteriores de la siguiente manera:

$$(R_f e_1)(x) = 3\theta_1(x) + 2\theta_2(x), \qquad (R_f e_2)(x) = -7\theta_1(x) + 8\theta_2(x).$$

Estas igualdades se cumplen para todo $x \in \mathbb{R}$, por eso tenemos las siguientes igualdades de funcionales:

$$R_f e_1 = 3\theta_1 + 2\theta_2, \qquad R_f e_2 = -7\theta_1 + 8\theta_2.$$

La matriz asociada a R con respecto a las bases $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}^*$ es

$$(R_f)_{\mathcal{E}^*,\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} = f_{\mathcal{E}}.$$

3. Proposición. Sea V un EV/$\mathbb{F}$ de dimensión finita, sea $f \in \mathcal{BL}(V)$ y sea $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ una base de V. Denotemos por $\Gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ a la base dual a la base $\mathcal{B}$ (recordamos que Γ es una base de V^*). Entonces

$$(R_f)_{\Gamma,\mathcal{B}} = f_{\mathcal{B}}.$$

Demostración. Sean $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Mostremos que la (i,j)-ésima entrada de la matriz $(R_f)_{\Gamma,\mathcal{B}}$ es igual a la (i,j)-ésima entrada de la matriz $f_{\mathcal{B}}$, esto es, a $f(b_i, b_j)$.

Por la definición de la matriz asociada a una transformación lineal, la (i,j)-ésima entrada de la matriz $(R_f)_{\mathcal{E}^*,\mathcal{E}}$ es la i-ésima coordenada del funcional $L_f b_j$ con respecto a la base Γ. Recordemos que en general la i-ésima coordenada de un funcional lineal $\varphi \in V^*$ en la base dual Γ se calcula como $\varphi(b_i)$. Para $\varphi = R_f b_j$ obtenemos lo siguiente:

$$(R_f b_j)(b_i) = f(b_i, b_j). \qquad \square$$

4. Tarea adicional. Establece una relación entre las matrices $(L_f)_{\Gamma,\mathcal{B}}$ y $f_{\mathcal{B}}$.

5. Proposición. Sea V un EV/$\mathbb{R}$ de dimensión finita y sea $f \in \mathcal{BL}(V)$. Entonces

$$\mathrm{r}(L_f) = \mathrm{r}(R_f).$$

6. Nota sobre la definición del rango de una forma bilineal. Podríamos definir el rango de una forma bilineal f como $\mathrm{r}(L_f)$ o $\mathrm{r}(R_f)$. La proposición anterior muestra que con respecto a cualquier base $\mathcal{B}$ la matriz asociada con la forma bilineal f coincide con la matriz asociada a la transformación lineal R_f, por eso

$$\mathrm{r}(f_{\mathcal{B}}) = \mathrm{r}(L_f) = \mathrm{r}(R_f),$$

y dos definiciones del rango de f coinciden.

7. Proposición. Sea V un EV/$\mathbb{R}$ de dimensión finita y sea $f \in \mathcal{BL}(V)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\mathrm{r}(L_f) = \mathrm{r}(R_f) = \dim(V)$.

(b) para todo $x \in V$ existe un $y \in V$ tal que $f(x,y) \neq 0$.

(c) para todo $y \in V$ existe un $x \in V$ tal que $f(x,y) \neq 0$.

Cuando se cumplen estas condiciones se dice que la forma f es *no degenerada* (= *no singular* = *de rango completo*).