Transformaciones lineales unitarias y ortogonales

Objetivos. Estudiar la definición y propiedades básicas de transformaciones lineales unitarias y ortogonales.

Requisitos. Transformación lineal adjunta, isometrías lineales.

1. Definición (transformación lineal unitaria). Sea V un espacio vectorial complejo con producto interno. Una transformación lineal $U \in \mathcal{L}(V)$ si se llama *unitaria*

$$UU^* = I \qquad \text{y} \qquad U^*U = I. \tag{1}$$

En el caso de espacios vectoriales reales se usa el término *transformación lineal ortogonal*. En esta definición nosotros suponemos que existe U^*.

2. Observación. La igualdad $U^*U = I$ significa que U es una isometría:

$$\langle Uv, Uw\rangle = \langle v, U^*Uw\rangle = \langle v, w\rangle.$$

3. Observación. Si $\dim(V) < +\infty$, entonces cualquiera de las dos igualdades (1) implica a la otra. En el caso de dimensión infinita existen transformaciones lineales que cumplen con sólo una de las igualdades (1). Véase un ejemplo en el tema "Isometrías lineales".

4. Ejercicio. Sea V un espacio vectorial complejo y sea $U \in \mathcal{L}(V)$. Suponemos que existe U^*. Entonces:

$$U \text{ es unitaria} \qquad \Longleftrightarrow \qquad U^* \text{ es unitaria.}$$

5. Proposición (transformaciones unitarias forman un subgrupo de transformaciones lineales invertibles). Sea V un espacio vectorial complejo. Entonces el conjunto

$$\{U \in \mathcal{L}(V)\colon UU^* = U^*U = I\}$$

es un subgrupo de transformaciones lineales invertibles, esto es:

1. Si $U_1, U_2 \in \mathcal{L}(V)$ son unitarias, entonces U_1U_2 también es unitaria.
2. Si $U \in \mathcal{L}(V)$ es unitaria, entonces U^{-1} también es unitaria.

6. Proposición (espectro de una transformación lineal unitaria). Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea $U \in \mathcal{L}(V)$ una transformación lineal unitaria. Entonces $\mathrm{sp}(U)$ es un subconjunto de la circunferencia unitaria:

$$\mathrm{sp}(U) \subset \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}.$$

Matrices unitarias y ortogonales

7. Definición (matriz unitaria). Una matriz $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ se llama *unitaria* si

$$AA^* = I_n, \qquad A^*A = I_n.$$

El conjunto de todas las matrices unitarias complejas de orden n se denota por $U_n(\mathbb{C})$.

8. Definición (matriz ortogonal). Una matriz $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ se llama *ortogonal* si

$$AA^T = I_n, \qquad A^TA = I_n.$$

El conjunto de estas matrices se denota por $U_n(\mathbb{R})$ o por $O_n(\mathbb{R})$.

9. Observación. Una matriz real es ortogonal si y sólo si es unitaria.

10. Nota. Matrices ortogonales también se pueden definir en el caso complejo (como matrices que cumplen con la condición $AA^T = A^TA = I_n$), pero son más importantes en el caso real.

11. Proposición (criterio de transformación unitaria en términos de su matriz en una base ortonormal). Sea V un EV de dimensión finita, sea $U \in \mathcal{L}(V)$ y sea $\mathcal{E}$ una base ortonormal. Entonces:

$$U \text{ es unitaria} \qquad \Longleftrightarrow \qquad U_{\mathcal{E}} \text{ es unitaria.}$$

12. Proposición (criterio de matriz unitaria). Sea $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) A es unitaria, esto es, $AA^* = I_n$ y $A^*A = I_n$.

(b) $AA^* = I_n$.

(c) $A^*A = I_n$.

(d) los renglones de A forman una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$.

(e) las columnas de A forman una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$.

13. Ejercicio (determinante de una matriz unitaria). Sea $A \in U_n(\mathbb{C})$. Demuestre que $|\det(A)| = 1$.

14. Ejercicio (espectro de una matriz unitaria es un subconjunto de la circunferencia unitaria). Sea $A \in U_n(\mathbb{C})$. Demuestre que

$$\mathrm{sp}(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \colon |\lambda| = 1\}.$$