Transformaciones lineales autoadjuntas (hermíticas)

Objetivos. Estudiar propiedades elementales de transformaciones lineales autoadjuntas. Demostrar que para toda transformación lineal autoadjunta en un espacio de dimensión finita existe una ortonormal base del espacio que consiste en vectores propios.

Requisitos. Producto interno, transformación lineal, transformación adjunta de una transformación lineal, representación matricial de una transformación lineal.

1. Definición (transformación lineal autoadjunta). Sea V un espacio vectorial complejo con producto interno. Una transformación lineal $T \in \mathcal{L}(V)$ se llama *autoadjunta* (= *hermítica* = *hermitiana*) si $T = T^*$, esto es,

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle \qquad \forall x, y \in V.$$

Al conjunto de transformaciones lineales autoadjuntas $V \to V$ lo denotamos por $\mathcal{L}_a(V)$:

$$\mathcal{L}_a(V) := \{T \in \mathcal{L}(V) \colon T^* = T\}.$$

2. Proposición.

1. Si V es un espacio vectorial real con producto interno, entonces $\mathcal{L}_a(V)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(V)$.
2. Si V es un espacio vectorial complejo con producto interno, entonces $\mathcal{L}_a(V)$ es cerrado bajo adición y bajo multiplicación por escalares reales.

3. Proposición. Sea V un espacio vectorial complejo. Entonces para toda $T \in \mathcal{L}(V)$ existe un único par (S, U) tal que $S, U \in \mathcal{L}_a(V)$ y $T = S + \mathrm{i}\,U$.

Idea de la demostración. Unicidad. Supongamos que T y U cumplen con las propiedades enunciadas. Entonces

$$\begin{aligned} T &= S + \mathrm{i}\,U, \\ T^* &= S - \mathrm{i}\,U. \end{aligned}$$

Sumando y restando estas igualdades obtenemos que S y U se expresan a través de T y T^* de manera única:

$$S = \frac{1}{2}(T + T^*), \qquad U = \frac{1}{2\,\mathrm{i}}(T - T^*). \tag{1}$$

Existencia. Definamos S y U mediante las igualdades (1). Entonces $T = S + \mathrm{i}\,U$ y es fácil checar que $S, U \in \mathcal{L}_a(V)$. □

4. Ejercicio (conmutador de dos transformaciones autoadjuntas). Sean $T, U \in \mathcal{L}_a(V)$. Muestre que $TU - UT$ se puede escribir en forma $\mathrm{i}\,S$, donde $S \in \mathcal{L}_a(V)$. Indicación: en otras palabras, tiene que checar que la transformación $\frac{1}{\mathrm{i}}(TU - UT)$ es autoadjunta.

5. Definición (matriz autoadjunta). Una matriz $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ se llama *autoadjunta* o *hermítica* si $A = A^*$, esto es, $A_{j,i} = \overline{A_{i,j}}$ para todos $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

6. Ejemplo. La siguiente matriz es autoadjunta:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 + 5\,\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ -1 - 5\,\mathrm{i} & 7 & -4 \\ -\,\mathrm{i} & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

7. Observación (elementos diagonales de cualquier matriz autoadjunta son reales). En el caso $i = j$ la condición $A_{j,i} = \overline{A_{i,j}}$ toma la forma $A_{i,i} = \overline{A_{i,i}}$ y significa que $A_{i,i} \in \mathbb{R}$.

8. Observación (para una matriz real, ser autoadjunta significa ser simétrica). Para $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. la condición $A = A^*$ es equivalente a la condición $A = A^T$.

9. Proposición (matriz de una transformación lineal autoadjunta en una base ortonormal). Sean V un espacio vectorial complejo de dimensión finita, $T \in \mathcal{L}(V)$, $\mathcal{E}$ una base ortonormal. Entonces:

$$T \text{ es autoadjunta} \qquad \Longleftrightarrow \qquad T_{\mathcal{E}} \text{ es autoadjunta.}$$

Idea de la demostración. Usar las propiedades de la adjunta y el hecho que la correspondencia entre transformaciones lineales y sus matrices en una base fija es biyectiva. □

Elementos de la teoría espectral de transformaciones lineales autoadjuntas

10. Proposición (valores propios de una transformación lineal autoadjunta son reales). Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión finita y sea $T \in \mathcal{L}_a(V)$. Entonces

$$\mathrm{sp}(T) \subset \mathbb{R}.$$

Demostración. Sea λ un valor propio de T y sea u un vector propio de T correspondiente a λ. Entonces

$$\lambda \|u\|^2 = \langle Tu, u \rangle = \langle u, Tu \rangle = \bar{\lambda} \|u\|^2.$$

Como $\|u\| \neq 0$, de allí sigue que $\lambda = \bar{\lambda}$, esto es, $\lambda \in \mathbb{R}$. □

11. Proposición (polinomio característico de una transformación lineal autoadjunta se factoriza en factores lineales sobre $\mathbb{R}$). Sea V un EV con producto interno, complejo o real, $1 \leq \dim(V) = n < +\infty$, y sea $T \in \mathcal{L}(V)$, $T^* = T$. Entonces el polinomio característico de T se factoriza en factores lineales sobre el campo $\mathbb{R}$, esto es, existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\chi_T(x) = \prod_{j=1}^{n} (x - \lambda_j). \tag{2}$$

Por consecuencia, $\mathrm{sp}(T) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \neq \emptyset$, y todos los coeficientes de χ_T son reales.

Demostración. 1. Caso complejo. El campo $\mathbb{C}$ es algebráicamente cerrado. Por eso existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tales que se cumple (2). Pero cada uno de los números $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ es valor propio de T. Por la proposición anterior, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

2. Caso real. Idea principal: considerar una transformación lineal en un espacio unitario que tenga la misma matriz asociada que la transformación dada T.

Sea $\mathcal{B}$ una base ortonormal de V. Denotemos a la matriz $T_{\mathcal{B}}$ por A. Entonces $A = A^T = A^*$ y $\chi_A = \chi_T$. En el espacio complejo $\mathbb{C}^n$ con el producto punto estándar consideremos la transformación lineal U definida por la siguiente regla:

$$Uz = Az \qquad \forall z \in \mathbb{C}^n.$$

La base canónica $\mathcal{E}$ de $\mathbb{C}^n$ es ortonormal, y $U_{\mathcal{E}} = A$. Como $A = A^*$, también $U = U^*$. Ahora aplicamos a la transformación U la parte de la proposición ya demostrada (el caso complejo) y obtenemos que el polinomio característico de U se factoriza sobre $\mathbb{R}$ en factores lineales. Pero $\chi_U = \chi_A = \chi_T$. □

12. Proposición (vectores propios de una transformación lineal autoadjunta, correspondientes a diferentes valores propios, son ortogonales). Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión finita y sea $T \in \mathcal{L}_a(V)$. Supongamos que λ y μ son diferentes valores propios de T, $u \in \ker(T - \lambda I)$, $w \in \ker(T - \mu I)$. Entonces

$$\langle u, w \rangle = 0.$$

Idea de la demostración. Calcular $\langle Tu, w \rangle$ y $\langle u, Tw \rangle$. □

13. Proposición (sobre espacios invariantes bajo la tranformación adjunta). Sea V un espacio vectorial con producto interno, $\dim(V) < +\infty$, sea $T \in \mathcal{L}(V)$ y sea W un subespacio de V invariante bajo T. Entonces $W^\perp$ es invariante bajo T^*.

Demostración. Sea $v \in W^\perp$. Mostremos que $T^*v \in W^\perp$. Para un $w \in W$ dada arbitrario, tenemos que demostrar que $\langle T^*v, w \rangle = 0$. Aplicamos la definición de T^*:

$$\langle T^*v, w \rangle = \langle v, Tw \rangle.$$

Como W es invariante bajo T, tenemos que $Tw \in W$. Luego aplicamos la hipótesis que $v \in W^\perp$ y obtenemos que $\langle v, Tw \rangle = 0$. □

14. Teorema (existencia de una base ortonormal de vectores propios de una transformación lineal autoadjunta). Sean V un EV complejo o real de dimensión finita, $T \in \mathcal{L}(V)$, $T = T^*$. Entonces en V existe una base ortonormal que consiste en vectores propios de T.

Demostración. Por inducción con respecto a la dimensión de V. Supongamos que la afirmación es válida para $\dim(V) = n$, y consideremos el caso $\dim(V) = n + 1$.

Sea λ un valor propio de T y sea u un vector propio normalizado ($\|u\| = 1$) asociado con λ. El subespacio $W = \operatorname{lin}(u)$ es invariante bajo T. Por la proposición, el subespacio $W^\perp$ es invariante bajo T^*, pero $T^* = T$. Como demostramos antes (estudianto espacios euclidianos), $\dim(W^\perp) = \dim(V) - \dim(W) = n$.

Denotemos por R a la transformación T restringida a $W^\perp$:

$$R\colon W^\perp \to W^\perp, \qquad R(v) = T(v).$$

Obviamente R es autoadjunta:

$$\langle Rv, w\rangle = \langle Tv, w\rangle = \langle v, Tw\rangle = \langle v, Rw\rangle \qquad \forall v, w \in W^\perp.$$

Por la hipótesis de inducción, aplicada a la transformación R, existe una base ortonormal $u_1, \ldots, u_n$ de $W^\perp$ que consiste en vectores propios de R.

Como R es una restricción de T, los vectores $u_1, \ldots, u_n$ son también vectores propios de T. La condición $u_1, \ldots, u_n \in W^\perp = \operatorname{lin}(u)^\perp$ garantiza que $u_1 \perp u, \ldots, u_n \perp u$. Así que $(u_1, \ldots, u_n, u)$ es una base ortonormal de V y consiste en vectores propios de T. □

Usando el criterio de matriz unitaria, podemos escribir el teorema anterior en términos matriciales:

15. Teorema (diagonalización unitaria de una matriz autoadjunta). Sea $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, donde $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, tal que $A^* = A$. Entonces existe una matriz $U \in U_n(\mathbb{F})$ y una matriz $D \in \operatorname{DiagMat}_n(\mathbb{R})$ tales que $A = UDU^{-1}$. En el caso $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ en vez de $U \in U_n(\mathbb{R})$ podemos escribir $U \in O_n(\mathbb{R})$.

Demostración. Consideremos la transformación lineal $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^n)$ definida por

$$T(x) := Ax \qquad \forall x \in \mathbb{F}^n.$$

Denotemos por $\mathcal{E}$ a la base canónica de $\mathbb{F}^n$. Entonces $T_\mathcal{E} = A$. Como $A = A^*$ y la base canónica $\mathcal{E}$ es ortonormal, tenemos que $T = T^*$.

Por el teorema anterior, existe una base ortonormal $\mathcal{B}$ de $\mathbb{F}^n$ que consiste en vectores propios de T. Lo último significa que la matriz $D := T_\mathcal{B}$ es diagonal y sus elementos diagonales son valores propios de T. En particular, las entradas de la matriz D son reales.

Como $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ son bases ortonormales, la matriz de cambio $U := P_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}}$ es unitaria. Ahora recordamos la fórmula de cambio de base:

$$T_\mathcal{B} = P_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}}^{-1} T_\mathcal{E} P_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}},$$

y obtenemos el resultado requerido:

$$D = U^{-1}AU. \qquad \square$$

16. Observación. En espacios de dimensión infinita hay transformaciones lineales autoadjuntas que no tienen ningún valor propio. Por supuesto, si no hay ningún valor propio, entonces no existe ninguna base del espacio que consista en vectores propios.

17. Ejemplo. En el espacio $C([0,1])$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int\limits_0^1 f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

consideremos la multiplicación por x:

$$(Tf)(x) = xf(x) \qquad \forall x \in [0,1] \quad \forall f \in C([0,1]).$$

Es fácil ver que $T = T^*$, pero T no tiene valores propios.

18. Ejercicios. Para cada una de las siguientes matrices autoadjuntas construir una base ortonormal de vectores propios y hacer las comprobaciones.

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -4 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$