Subespacio generado por un conjunto finito de vectores (envoltura lineal de un conjunto finito de vectores)

1. Listas de vectores. *Listas de vectores* son personajes típicos de Álgebra Lineal. Una *lista de vectores* es una secuencia ordenada finita de vectores. Según esta definición, i) los vectores en una lista pueden repetirse, ii) es importante su orden, iii) el número de los elementos es finito.

Una lista de vectores se denota por $(a_1, \ldots, a_m)$, $(a_k)_{k=1}^m$ o simplemente $a_1, \ldots, a_m$.

2. Nota. En muchos libros en lugar de *listas de vectores* se consideran *conjuntos de vectores*. En algunas situaciones esto es más cómodo, en otras no.

3. Definición (combinación lineal). Sean V un EV/$\mathbb{F}$, $(a_k)_{k=1}^m$ una lista de vectores en E y $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ elementos de $\mathbb{F}$. El vector

$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_m a_m$$

o, más brevemente,

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k,$$

se llama *combinación lineal* de vectores $a_1, \ldots, a_m$ con coeficientes $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$.

4. Ejemplo. Calcular la combinación lineal $a_1 - 5a_2 + 2a_3$ para

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

5. Definición (envoltura lineal de una lista de vectores). La *envoltura lineal* de una lista de vectores $(a_k)_{k=1}^m$ o el *conjunto generado por el sistema de vectores* $(a_k)_{k=1}^m$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de este sistema:

$$\ell(a_1, \ldots, a_m) \coloneqq \left\{ v \in V : \quad \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{F} \quad v = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j \right\}.$$

Otras notaciones para la envoltura lineal:

$$\mathcal{L}(a_1, \ldots, a_m), \qquad \operatorname{span}(a_1, \ldots, a_m), \qquad \langle a_1, \ldots, a_m \rangle, \qquad \operatorname{gen}(a_1, \ldots, a_m).$$

6. Definición (envoltura lineal de un conjunto de vectores). Sea $C \subset V$. Entonces la envoltura lineal de C, denotada por $\ell(C)$, se define como el conjunto de todas las combinaciones lineales de listas finitas de vectores diferentes pertenecientes a C. Formalmente,

$$\ell(C) := \Big\{ v \in V\colon \quad \exists p \in \{0,1,2,\ldots\} \quad \exists c_1,\ldots,c_p \in C, \quad c_1,\ldots,c_p \text{ son dif.}, \\ \exists \lambda_1,\ldots,\lambda_p \in \mathbb{F} \qquad v = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k c_k \Big\}.$$

La siguiente proposición no se incluye en los exámenes (y en muchos libros se usa sin demostración).

7. Proposición. Sean $a_1,\ldots,a_m \in V$. Entonces la envoltura lineal de la lista de vectores $a_1,\ldots,a_m$ coincide con la envoltura lineal del conjunto de vectores $\{a_1,\ldots,a_m\}$:

$$\ell(a_1,\ldots,a_m) = \ell(\{a_1,\ldots,a_m\}).$$

Demostración. 1. Sea $v \in \ell(a_1,\ldots,a_m)$. Esto significa que existen $\lambda_1,\ldots,\lambda_m \in \mathbb{F}$ tales que

$$v = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j.$$

Puede ser que algunos de los vectores $a_1,\ldots,a_m$ coinciden, por eso tenemos que hacer la siguiente construcción. Sean $c_1,\ldots,c_p$ todos los elementos diferentes a pares del conjunto $\{a_1,\ldots,a_m\}$:

$$\{c_1,\ldots,c_p\} = \{a_1,\ldots,a_m\}.$$

Agrupamos los vectores iguales y sumamos los coeficientes correspondientes:

$$\mu_k := \sum_{a_j = c_k} \lambda_j.$$

Entonces

$$\begin{aligned} v = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j\colon a_j = c_k} \lambda_j a_j = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j\colon a_j = c_k} \lambda_j \right) c_k \\ = \sum_{k=1}^{p} \mu_k c_k \in \ell(\{c_1,\ldots,c_p\}) = \ell(\{a_1,\ldots,a_m\}). \end{aligned}$$

2. Sea $v \in \ell(\{a_1,\ldots,a_m\})$. Esto significa que existe un número $q \le m$, algunos vectores $c_1 = a_{i_1},\ldots,c_q = a_{i_q}$ diferentes a pares y algunos escalares $\nu_1,\ldots,\nu_q \in\in \mathbb{F}$ tales que

$$v = \sum_{k=1}^{q} \nu_k c_k.$$

Definimos los escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ de la siguiente manera:

$$\lambda_j := \begin{cases} \nu_k, & \text{si } j = i_k; \\ 0, & \text{si } j \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_1, \ldots, i_q\}. \end{cases}$$

Entonces

$$v = \sum_{k=1}^{q} \lambda_{i_k} a_{i_k} + \sum_{j \in \{1,\ldots,m\} \setminus \{i_1,\ldots,i_q\}} \lambda_j a_j = \sum_{k=1}^{m} \lambda_j a_j \in \ell(a_1, \ldots, a_m). \qquad \square$$

8. Ejemplo. Consideremos el espacio $V^3(O)$. Sean A, B puntos en el espacio tales que O, A, B no pertenecen a una recta, en otras palabras, $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ no son colineales. Sea Π el plano generado por O, A, B. Entonces el conjunto

$$\{\overrightarrow{OC} \colon C \in \Pi\}$$

es la envoltura lineal del sistema $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$:

$$\{\overrightarrow{OC} \colon C \in \Pi\} = \ell(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}).$$

9. Proposición (sobre la envoltura lineal). Sean V un espacio vectorial y $\mathcal{A}$ un conjunto finito de vectores de V. Entonces:

1. $\ell(\mathcal{A})$ es un subespacio vectorial de V.
2. Si W es un subespacio vectorial de E y $\mathcal{A} \subseteq W$, entonces $\ell(\mathcal{A}) \subseteq W$.

Esto significa que $\ell(\mathcal{A})$ es el subespacio vectorial mínimo que contiene al conjunto $\mathcal{A}$.

10. Nota. La envoltura lineal de un conjunto finito de vectores $\mathcal{A}$ se llama también el *subespacio generado* por $\mathcal{A}$.

11. Subespacio generado por un conjunto unipuntual (o por una lista de un vector). Sea $a \in V$. Entonces $\ell(a) = \ell(\{a\})$ es el conjunto de todos los múltiplos de a:

$$\ell(\{a\}) = \underbrace{\{v \in V \colon \quad \exists \lambda \in \mathbb{F} \quad v = \lambda a\}}_{\text{definición de } \ell(a)} = \underbrace{\{\lambda a \colon \ \lambda \in \mathbb{F}\}}_{\text{forma breve}}.$$

12. Subespacio generado por el conjunto vacío. Es cómodo usar el siguiente convenio:

$$\ell(\emptyset) = \{\mathbf{0}\}.$$

13. Proposición (propiedad transitiva de las envolturas lineales). Sean $a_1, \ldots, a_m$ algunos vectores en V, sean $b_1, \ldots, b_k \in \ell(a_1, \ldots, a_m)$ y sea $c \in \ell(b_1, \ldots, b_k)$. Entonces $c \in \ell(a_1, \ldots, a_m)$.

14. Corolario. Sean $a_1, \ldots, a_m \in V$. Entonces $\ell(\ell(a_1, \ldots, a_m)) = \ell(a_1, \ldots, a_m)$.

15. Ejemplo. En el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\quad \ell\{1, 1+x\} = \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$.

16. Proposición (existencia de una solución de un sistema de ecuaciones lineales en términos del subespacio generado). Sean $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ y $b \in \mathbb{F}^m$. Entonces el sistema de ecuaciones lineales

$$Ax = b$$

es consistente si y sólo si $b \in \ell(A_{*,1}, \ldots, A_{*,n})$.

Demostración. Se sabe que

$$Ax = x_1 A_{*,1} + \ldots + x_n A_{*,n}.$$

El sistema $Ax = b$ tiene una solución si y sólo si existen $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{F}$ tales que

$$x_1 A_{*,1} + \ldots + x_n A_{*,n} = b. \qquad \square$$

17. Ejemplo. Determinemos si $b \in \ell(a_1, a_2, a_3)$ o no, donde a_1, a_2, a_3, b son los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Solución. $b \in \ell(a_1, a_2, a_3)$

$$\begin{aligned}
&\iff \quad \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}: \quad \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = b \\
&\iff \quad \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}: \quad \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix} \\
&\iff \quad \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}: \quad \begin{bmatrix} 2\lambda_1 & + & 3\lambda_2 & + & \lambda_3 \\ -\lambda_1 & & & - & 2\lambda_3 \\ 3\lambda_1 & + & 4\lambda_2 & + & 2\lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix} \\
&\iff \quad \text{tiene solución el sistema} \quad \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \end{array}\right].
\end{aligned}$$

Simplifiquemos el sistema haciendo operaciones elementales:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 *= -1]{\substack{R_1 += 2R_2 \\ R_3 += 3R_2}} \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 3 & -3 & -9 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & -4 & -12 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 += -4R_1]{R_1 *= \frac{1}{3}} \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

El sistema es consistente. La solución general es

$$\begin{bmatrix} 5 - 2\lambda_3 \\ -3 + \lambda_3 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

Elijamos una solución particular (con $\lambda_3 = 2$):

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 2.$$

Hagamos la comprobación:

$$a_1 - a_2 + 2a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-3+2 \\ -1-0-4 \\ 3-4+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}. \quad \checkmark \quad \square$$

18. Ejercicio. Sean

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Determine si $b \in \ell(a_1, a_2, a_3)$.

19. Ejercicio. Sean a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 los siguientes vectores del espacio $\mathbb{R}^3$:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Determine si $b_1 \in \ell(a_1, a_2, a_3)$. Determine si $b_2 \in \ell(a_1, a_2, a_3)$.

20. Ejercicio. Halle todos los valores del parámetro λ tales que $b \in \ell(a_1, a_2, a_3)$, donde

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ \lambda \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$