Operaciones con transformaciones lineales

Objetivos. Definir la suma, el producto por escalar y el producto de transformaciones lineales. Conocer sus propiedades elementales.

Requisitos. Transformaciones lineales, operaciones con funciones, composición de funciones.

1. Definición (suma de transformaciones lineales). Sean $T, U \in \mathcal{L}(V, W)$. La aplicación $T + U \colon V \to W$ se define mediante la fórmula

$$\forall v \in V \qquad (T + U)(v) := T(x) + U(v).$$

2. Proposición (la suma de dos transformaciones lineales es lineal). Sean $T, U \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces $T + U \in \mathcal{L}(V, W)$.

Demostración. Probemos que $T + U$ es aditiva. Sean $a, b \in V$. Entonces

$$\begin{aligned}(T + U)(a + b) &\overset{\text{(i)}}{=\!=} T(a + b) + U(a + b) \overset{\text{(ii)}}{=\!=} \big(T(a) + T(b)\big) + \big(U(a) + U(b)\big) \\ &\overset{\text{(iii)}}{=\!=} \big(T(a) + U(a)\big) + \big(T(b) + U(b)\big) \overset{\text{(iv)}}{=\!=} (T + U)(a) + (T + U)(b).\end{aligned}$$

En (i) y (iv) usamos la definición de $T + U$, en (ii) la aditividad de T y U, en (iii) las propiedades asociativa y conmutativa de la adición en el espacio vectorial W.

Ahora probemos que $T + U$ es homogénea. Sean $a \in V$, $\gamma \in \mathbb{F}$. Entonces

$$\begin{aligned}(T + U)(\gamma a) &\overset{\text{(i)}}{=\!=} T(\gamma a) + U(\gamma a) \overset{\text{(ii)}}{=\!=} \gamma T(a) + \gamma U(a) \\ &\overset{\text{(iii)}}{=\!=} \gamma\big(T(a) + U(a)\big) \overset{\text{(iv)}}{=\!=} \gamma(T + U)(a).\end{aligned}$$

En (i) y (iv) aplicamos la definición de $T + U$, en (ii) la propiedad homogénea de T y U, en (iii) una de las dos leyes distributivas en el espacio vectorial W. $\square$

3. Definición (producto de una transformación lineal por un escalar). Sean $T \in \mathcal{L}(V, W)$ y $\lambda \in \mathbb{F}$. La aplicación $\lambda T \colon V \to W$ se define mediante la fórmula

$$\forall v \in V \qquad (\lambda T)(v) := \lambda T(v).$$

4. Definición (producto de transformaciones lineales). Sean $T \in \mathcal{L}(V, W)$ y $S \in \mathcal{L}(W, X)$. La aplicación $ST\colon V \to X$ se define mediante la fórmula

$$\forall v \in V \qquad (ST)(v) \coloneqq S(T(v)).$$

En otras palabras, $ST = S \circ T$.

5. Ejercicio. Demuestre que las aplicaciones λT y ST de las dos definiciones anteriores son transformaciones *lineales*.

6. Ejercicio: $\mathcal{L}(V, W)$ es un EV. Sean V, W espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{F}$. Demuestre que $\mathcal{L}(V, W)$ con operaciones definidas arriba es un EV/$\mathbb{F}$.

7. Propiedades del producto de transformaciones lineales.

- $(\lambda T + \mu U)S = \lambda(TS) + \mu(US)$.
- $S(\lambda T + \mu U) = \lambda(ST) + \mu(SU)$.
- $S(TU) = (ST)U$.
- Si $\dim V \geq 2$, entonces existen $S, T \in \mathcal{L}(V)$ tales que $ST \neq TS$.

Potencias enteras no negativas de un operador lineal

8. Definición (potencias de un operador lineal). Sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Las potencias de T se definen de manera recursiva:

$$T^0 = I, \qquad T^{n+1} = T^n T \qquad \forall n \in \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

9. Propiedades de potencias de un operador lineal.

- $\forall m, n \in \{0, 1, 2, \ldots\} \qquad T^m T^n = T^{m+n}$.
- $\forall m, n \in \{0, 1, 2, \ldots\} \qquad (T^m)^n = T^{mn}$.

Polinomio de un operador lineal

10. Definición (polinomio de una transformación lineal). Sean V un EV/$\mathbb{F}$, $T \in \mathcal{L}(V)$, $P \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$,

$$P(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k.$$

Entonces $P(T)$ se define por la siguiente fórmula:

$$P(T) = \sum_{k=0}^{d} a_k T^k.$$

11. Propiedades de polinomios de un operador lineal.

- $(P + Q)(T) = P(T) + Q(T)$.
- $(\alpha P)(T) = \alpha P(T)$.
- $(PQ)(T) = P(T)Q(T)$.