Transformaciones lineales

Objetivos. Definir el concepto de transformación lineal y conocer algunos ejemplos.

Requisitos. Espacios vectoriales, combinaciones lineales.

1. Definición (transformación lineal). Sean V y W espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{F}$. Una aplicación $T\colon V \to W$ se llama *transformación lineal* de V en W (también se usa el término *operador lineal*) si es *lineal*, esto es, cumple con las siguientes propiedades:

- es *aditiva*:
$$T(a+b) = T(a) + T(b) \qquad \forall a, b \in V;$$
- es *homogénea*:
$$T(\lambda a) = \lambda T(a) \qquad \forall a \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{F}.$$

Denotemos por $\mathcal{L}(V, W)$ al conjunto de todas las transformaciones lineales de V en W. En el caso $W = V$ en vez de $\mathcal{L}(V, W)$ se escribe $\mathcal{L}(V)$.

2. Observación (otras maneras de escribir la propiedad lineal). Una aplicación T es lineal si y sólo si
$$\forall a, b \in V \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{F} \qquad T(\lambda a + \mu b) = \lambda T(a) + \mu T(b)$$
Además, una aplicación T es lineal si y sólo si
$$\forall a, b \in V \qquad \forall \lambda \in \mathbb{F} \qquad T(\lambda a + b) = \lambda T(a) + T(b).$$

3. Proposición (toda transformación lineal transforma el vector cero en el vector cero). Sean V, W espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{F}$ y sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces
$$T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W.$$

Demostración. Hay dos demostraciones naturales. Para la primera considere $T(\mathbf{0}_V + \mathbf{0}_V)$. Para la segunda considere $T(0\mathbf{0}_V)$. □

4. Proposición (transformación lineal transforma combinaciones lineales en combinaciones lineales). Sean V, W espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{F}$ y sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Sean $n \in \{1, 2, \ldots\}$, $v_1, \ldots, v_m \in V$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{F}$. Entonces
$$T\left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k v_k\right) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k T(v_k).$$

Idea de la demostración. Inducción con respecto a m usando la definición recursiva de la suma:
$$\sum_{k=1}^{m+1} v_k = \sum_{k=1}^{m} v_k + v_{m+1}.$$
□

Ejemplos de transformaciones lineales

5. Transformación nula. La aplicación $\mathbf{0}_{V\to W}\colon V\to W$ definida por

$$\mathbf{0}_{V\to W}(x)=\mathbf{0}_W \qquad \forall x\in V$$

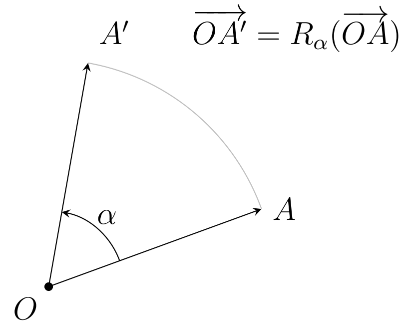
es una transformación lineal y se llama la *transformación nula*.

6. Transformación identidad. La aplicación $I\colon V\to V$ definida por

$$I(x)=x \qquad \forall x\in V$$

es lineal y se llama la *transformación identidad*.

7. Rotación del plano en un ángulo fijo $\boldsymbol{\alpha}$. Sea α un ángulo fijo. En el espacio $V^2(O)$ consideremos la transformación R_α que manda cualquier vector $\overrightarrow{OA}$ al vector $\overrightarrow{OA'}$ que se obtiene del vector $\overrightarrow{OA}$ al girarlo en el ángulo α. El dibujo corresponde al ángulo $\alpha=\frac{\pi}{3}$:



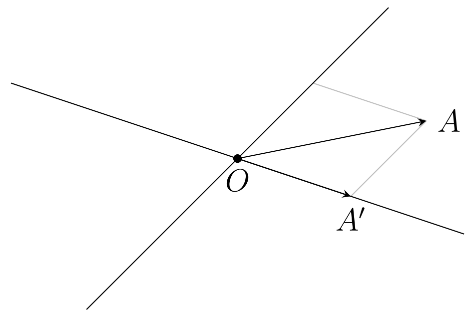
8. Proyección a una recta. Consideremos el espacio vectorial $V^2(O)$. Sean ℓ_1 y ℓ_2 dos rectas en el plano que se intersectan en el punto O. Cada vector $\overrightarrow{OA}$ se puede escribir de manera única como

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OA''}, \qquad \text{donde} \qquad A'\in\ell_1 \quad \text{y} \quad A''\in\ell_2.$$

Definamos el mapeo $P\colon V^2(O)\to V^2(O)$ por la fórmula de correspondencia

$$P(\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{OA'}.$$

Se dice que P es la proyección del plano a la recta ℓ_1 paralelamente a la recta ℓ_2.



Notemos que si $A \in \ell_1$, entonces $P(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OA}$. De allí es fácil concluir que la composición del mapeo P y si mismo es igual a P: $P \circ P = P$. En general, toda transformación lineal con esta propiedad se llama *proyección*.

9. Operador derivada en el espacio de polinomios. Definamos el operador

$$D\colon \mathcal{P}_n(\mathbb{F}) \to \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{F})$$

mediante la regla:

$$D(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n) = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + \ldots + n\alpha_n x^{n-1}.$$

Notemos que esta definición no usa la noción de límite y es válida para cualquier campo $\mathbb{F}$ (por ejemplo, para campos finitos). En el caso $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ (o $\mathbb{F} = \mathbb{C}$) esta *derivada algebráica* coincide con la derivada definida en el curso de cálculo a través de cierto límite.

10. Multiplicación de polinomios por x. Definamos $T\colon \mathcal{P}_n(\mathbb{F}) \to \mathcal{P}_{n+1}(\mathbb{F})$ por la regla: $(Tf)(x) = xf(x)$.

11. Multiplicación de funciones continuas por una función fija. Sea $g \in C[a,b]$ un función fija. Definamos el operador $T \in \mathcal{L}(C[a,b])$ por la siguiente regla de correspondencia: $(Tf)(x) = f(x)g(x)$.

12. Multiplicación de vectores por una matriz. Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$. Definamos la transformación $T\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ mediante la siguiente regla de correspondencia:

$$T(x) = Ax \qquad \forall x \in \mathbb{F}^n.$$

En las siguientes clases veremos que este ejemplo es general: todas las transformaciones lineales que actúan en espacios vectoriales de dimensiones finitas se pueden representar a través de la multiplicación por matrices.

13. Ejercicio. Demuestre que todas las aplicaciones mencionadas anteriormente son lineales.

14. Contraejemplo. La aplicación $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

no es transformación lineal. Mostremos con un ejemplo concreto que T no cumple con la propiedad homogénea:

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad T(v) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad 2T(v) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$2v = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad T(2v) = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad T(2v) \neq 2T(v).$$

15. Contraejemplo. La función $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la regla

$$T(x) = \begin{bmatrix} 3x_1 + 5x_2 \\ x_2 - 7 \end{bmatrix}$$

no es transformación lineal, porque

$$T(\mathbf{0}_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}_2,$$

y nosotros sabemos (Proposición 3) que si T fuera una transformación lineal, entonces $T(\mathbf{0}_2)$ sería igual a $\mathbf{0}_2$.

16. Ejercicio. Para cada una de las siguientes aplicaciones determine si esta es una transformación lineal o no:

1. $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}.$
2. $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix}.$
3. $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = (3x_1 - 4x_2) \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \end{bmatrix}.$