Propiedad lineal

Ejercicios

Objetivos. Repasar el concepto de funcional lineal. Comprender cómo se aplica un funcional lineal a una combinación lineal.

Requisitos. Funcional lineal, transformación lineal.

En este tema suponemos que V es un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$.

1. Definición (funcional lineal o forma lineal). Una función $f\colon V \to \mathbb{F}$ se llama *funcional lineal* o *forma lineal* si es *aditiva* y *homogénea*:

$$\forall u, v \in \underbrace{\qquad}_{?} \qquad f(u+v) = f(u) + \underbrace{\qquad\quad}_{?};$$

$$\forall u \in V \quad \forall \lambda \in \underbrace{\qquad}_{?} \qquad f(\lambda u) = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}.$$

2. Ejemplos. Sea $f\colon V \to \mathbb{R}$ un funcional lineal y sean $a, b \in V$. Escriba las siguientes expresiones en términos de $f(a)$ y $f(b)$:

$$f(a+b) = \underbrace{\qquad\quad}_{?} + \underbrace{\qquad\quad}_{?};$$

$$f(-7a) = \underbrace{\qquad\qquad\quad}_{?};$$

$$f(3a+5b) = f(\underbrace{\qquad\quad}_{?}) + f(\underbrace{\qquad\quad}_{?}) = \underbrace{\qquad\qquad\quad}_{?} + \underbrace{\qquad\qquad\quad}_{?};$$

$$f(a-2b) =$$

$$f(-a) = f((-1)a) = \underbrace{\qquad}_{?} f(a) = -f(a).$$

Otras definiciones equivalentes de la propiedad lineal

3. Funcional lineal y combinación lineal de dos vectores. Sea $f\colon V \to \mathbb{F}$ un funcional lineal. Entonces

$$\forall a, b \in V \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{F} \qquad f(\lambda a + \mu b) =$$

4. Supongamos que $f\colon V \to \mathbb{F}$ es una función que cumple con la propiedad

$$\forall a, b \in V \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{F} \qquad f(\lambda a + \mu b) = \tag{1}$$

Demostremos que en este caso la función f es lineal, es decir, es aditiva y homogénea. En efecto, la propiedad aditiva

$$f(u + v) = f(u) + f(v),$$

se obtiene al aplicar (1) con

$$a = \underbrace{\qquad}_{?}, \qquad b = \underbrace{\qquad}_{?}, \qquad \lambda = \underbrace{\qquad}_{?}, \qquad \mu = \underbrace{\qquad}_{?}.$$

La propiedad homogénea

$$f(\alpha u) = \alpha f(u)$$

se obtiene al aplicar (1) con

$$a = \underbrace{\qquad}_{?}, \qquad b = \underbrace{\qquad}_{?}, \qquad \lambda = \underbrace{\qquad}_{?}, \qquad \mu = \underbrace{\qquad}_{?}.$$

Funcionales lineales y sumas de varios sumandos

5. Aplicar un funcional lineal a una suma de tres sumandos.
Sea $f\colon V \to \mathbb{F}$ un funcional lineal y sean $u_1, u_2, u_3 \in V$. Simplifique la expresión:

$$f(u_1 + u_2 + u_3) = f\big(\underbrace{(u_1 + u_2)}_{\text{un vector}} + \underbrace{u_3}_{\substack{\text{otro}\\ \text{vector}}}\big) \overset{\text{(i)}}{=\!=} f\big(\underbrace{\qquad\quad}_{?}\big) + f\big(\underbrace{\quad\;}_{?}\big)$$

$$\overset{\text{(ii)}}{=\!=} f\big(\underbrace{\quad\;}_{?}\big) + f\big(\underbrace{\quad\;}_{?}\big) + f\big(\underbrace{\quad\;}_{?}\big).$$

En los pasos (i) y (ii) se aplica la propiedad aditiva de f.

6. Aplicar un funcional lineal a una suma de cuatro sumandos.
Sea $f\colon V \to \mathbb{F}$ un funcional lineal y sean $u_1, u_2, u_3, u_4 \in V$. Simplifique la expresión:

$$f(u_1 + u_2 + u_3 + u_4) = f\big((\underbrace{\qquad\qquad\quad}_{?}) + u_4\big) \overset{\text{(i)}}{=\!=} f\big(\underbrace{\qquad\qquad\quad}_{?}\big) + f(u_4)$$

$$\overset{\text{(ii)}}{=\!=} f\big(\underbrace{\quad\;}_{?}\big) + f\big(\underbrace{\quad\;}_{?}\big) + f\big(\underbrace{\quad\;}_{?}\big) + f\big(\underbrace{\quad\;}_{?}\big).$$

En el paso $\underbrace{\quad\;}_{?}$ se usa el resultado del ejercicio anterior,

y en el paso $\underbrace{\quad\;}_{?}$ se aplica la propiedad aditiva de f.

7. Aplicar un funcional lineal a una suma de cinco sumandos.
Sea $f\colon V \to \mathbb{F}$ un funcional lineal y sean $u_1, \ldots, u_5 \in V$. Simplifique la expresión:

$$f\left(\sum_{j=1}^{5} u_j\right) \overset{\text{(i)}}{=\!=} f\left(\sum_{j=}\; \underbrace{\quad\;}_{?} + u_5\right) \overset{\text{(ii)}}{=\!=} f\left(\sum_{j=}\; \underbrace{\quad\;}_{?}\right) + f(u_5)$$

$$\overset{\text{(iii)}}{=\!=} \sum_{j=} f\big(\underbrace{\quad\;}_{?}\big) + f\big(\underbrace{\quad\;}_{?}\big) \overset{\text{(iv)}}{=\!=} \sum_{j=} f\big(\underbrace{\quad\;}_{?}\big).$$

En los pasos $\underbrace{\quad\;}_{?}$ y $\underbrace{\quad\;}_{?}$ se usa la definición de $\sum$;

en el paso $\underbrace{\quad\;}_{?}$ se usa el resultado del ejercicio anterior,

y en el paso $\underbrace{\quad\;}_{?}$ se aplica la propiedad aditiva de f.

8. Funcional lineal y una suma de m sumandos. Sea $f\colon V \to \mathbb{F}$ un funcional lineal, sea $m \in \{1, 2, \ldots\}$ y sean $u_1, \ldots, u_m \in V$. Entonces se cumple la siguiente fórmula:

$$f\left(\sum_{j=1}^{m} \underbrace{\qquad}_{?}\right) = \sum_{j=} \underbrace{\qquad\quad}_{?}. \tag{2}$$

Demostremos esta fórmula por inducción sobre m.

9. Base de inducción ($m = 1$).
Para $m = 1$ ambos lados de (2) son iguales a $\underbrace{\qquad\qquad}_{?}$ y por lo tanto coinciden.

10. Paso inductivo. Supongamos que la fórmula (2) es válida para m sumandos (es nuestra *hipótesis de inducción*):

$$f\left(\sum_{j=1}^{m} \underbrace{\qquad}_{?}\right) = \sum_{j=} \underbrace{\qquad\quad}_{?},$$

y la demostremos para $m + 1$ sumandos:

$$f\left(\sum_{j=1}^{m+1} \underbrace{\qquad}_{?}\right) = f\left(\sum_{j=1} \underbrace{\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad\quad}_{u_?}\right) \overset{\text{(i)}}{=\!=} f\left(\sum_{j=1} \underbrace{\qquad}_{?}\right) + f(\underbrace{\qquad\quad}_{?})$$

$$\overset{\text{(ii)}}{=\!=} \sum_{j=1} \underbrace{\qquad\qquad}_{?} + f(\underbrace{\qquad\quad}_{?}) \overset{\text{(iii)}}{=\!=} \sum_{j=1} \underbrace{\qquad\qquad}_{?}.$$

En los pasos $\underbrace{\qquad}_{?}$ y $\underbrace{\qquad}_{?}$ se usa la definición inductiva de $\sum$,
y en el paso $\underbrace{\qquad}_{?}$ se aplica la hipótesis de inducción.

11. Funcional lineal y una combinación lineal. Sean $f\colon V \to \mathbb{F}$ un funcional lineal, $m \in \{1, 2, \ldots\}$, $u_1, \ldots, u_m \in V$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{F}$. Entonces

$$f\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j u_j\right) \overset{\text{(i)}}{=\!=} \sum f(\underbrace{\qquad\quad}_{?}) \overset{\text{(ii)}}{=\!=} \sum \underbrace{\qquad}_{?} f(\underbrace{\qquad}_{?}).$$

En el paso $\underbrace{\qquad}_{?}$ se aplica la fórmula $\underbrace{\qquad}_{?}$,
y en el paso $\underbrace{\qquad}_{?}$ se usa la propiedad $\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}$ del funcional f.