Descomposición primaria

En este tema suponemos que V es un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$.

1. Lema (sobre proyecciones). Sean $P_1, \ldots, P_k \in \mathcal{L}(V)$ tales que

$$P_1 + \ldots + P_k = I, \qquad P_i P_j = 0 \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\},\ i \neq j.$$

Entonces $P_1, \ldots, P_k$ son proyecciones ($P_i^2 = P_i$) y el espacio V es la suma directa de sus imágenes:

$$V = \operatorname{im}(P_1) \dotplus \cdots \dotplus \operatorname{im}(P_k).$$

2. Teorema (descomposición primaria de un operador lineal). Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo $\mathbb{F}$, y sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Escribamos el polinomio mínimo de T en forma

$$\mu_T = p_1^{r_1} \cdots p_m^{r_m},$$

donde $p_1, \ldots, p_m \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ son algunos polinomios mónicos irreducibles sobre $\mathbb{F}$ y distintos a pares, y $r_1, \ldots, r_m$ son algunos enteros positivos. Sea

$$W_j \coloneqq \ker(p_j(T)^{r_j}) \qquad \forall j \in \{1, \ldots, m\}.$$

Entonces:

1) V es la suma directa de $W_1, \ldots, W_m$:

$$V = W_1 \dotplus \ldots \dotplus W_m;$$

2) cada W_i es invariante bajo T;

3) si denotamos por T_j a la comprensión de T sobre el subespacio invariante W_j, entonces el polinomio mínimo de T_j es $p_j^{r_j}$.

Plan de demostración. 1. Definamos los polinomios f_i por

$$f_i = \frac{\mu_T}{p_i^{r_i}} = \prod_{\substack{1 \le j \le m \\ j \neq i}} p_j^{r_j}.$$

Como $p_1, \ldots, p_m$ son mónicos, irreducibles y distintos, los polinomios $f_1, \ldots, f_m$ son primos relativos, esto es,

$$\gcd(f_1, \ldots, f_m) = 1.$$

Por eso existen polinomios $g_1, \ldots, g_m$ tales que

$$\sum_{i=1}^{m} f_i g_i = 1. \tag{1}$$

Notemos que si $i \neq j$, entonces el polinomio $f_i f_j$ contiene todos los factores $p_1^{r_1}, \ldots, p_m^{r_m}$ y se divide entre μ_T. Por consecuencia,

$$f_i(T) f_j(T) = (f_i f_j)(T) = \mathbf{0}.$$

2. Definamos transformaciones lineales $E_1, \ldots, E_m$ por

$$E_j \coloneqq f_j(T) g_j(T).$$

Evaluando ambos lados de (1) en T obtenemos que

$$E_1 + \cdots + E_m = I.$$

Además

$$E_i E_j = f_i(T) g_i(T) f_j(T) g_j(T) = f_i(T) g_i(T) f_j(T) g_j(T) = \mathbf{0}.$$

Así que $E_1, \ldots, E_k$ son proyecciones.

3. Demostremos que $W_j = \operatorname{im}(E_j)$. Si $v \in \operatorname{im}(E_j)$, entonces $v = E_j v$ y

$$(p_j^{r_j}(T))v = p_j^{r_j}(T) f_j(T) g_j(T) v = \mu_T(T) g_j(T) v = \mathbf{0},$$

así que $v \in \ker(p_j^{r_j}(T)) = W_j$.

Recíprocamente, si $v \in \ker(p_j^{r_j}(T))$, entonces para todo $i \neq j$ obtenemos que $E_i v = f_i(T) g_i(T) v = \mathbf{0}$ pues f_i contiene el factor $p_j^{r_j}(T)$. Por lo tanto,

$$v = Iv = \sum_{i=1}^{m} E_i v = E_j v.$$

4. Para todo $j \in \{1, \ldots, k\}$, es subespacio W_j es invariante bajo T. Es cómodo demostrarlo usando el resultado del paso 3. Si $v \in \operatorname{im}(E_j)$, entonces $v = E_j v$ y

$$T(v) = T E_j v = E_j(Tv) \in \operatorname{im}(E_j).$$

Las transformaciones T y E_j conmutan porque E_j es un polinomio de T.

5. El polinomio mínimo de T_j es $p_j^{r_j}$. Primero mostremos que $p_j^{r_j}$ anula T_j. Si $v \in W_j = \operatorname{im}(E_j)$, entonces $v = E_j v$ y

$$p_j^{r_j}(T_j) v = p_j^{r_j}(T) E_j v = p_j^{r_j}(T) f_j(T) g_j(T) v = \mu_T(T) g_j(T) v = \mathbf{0}.$$

Ahora tenemos que demostrar que cualquier polinomio anulador de T_j se divide entre $p_j^{r_j}$. Sea g un anulador de T_j, esto es, $g(T)v = \mathbf{0}$ para todo $v \in W_j$. Entonces $g(T)E_j = \mathbf{0}$ y

$$g(T) f_j(T) = g(T) f_j(T) \sum_{i=1}^{m} E_i = f_j(T) \underbrace{g(T) E_j}_{\substack{\| \\ \mathbf{0}}} + \sum_{i \neq j} g(T) \underbrace{f_j(T) E_i}_{\substack{\| \\ \mathbf{0}}} = \mathbf{0},$$

así que $g f_j$ se divide entre el polinomio μ_T y en particular entre su factor $p_j^{r_j}$. $\square$

3. Ejemplo. Sea T el operador lineal en $\mathbb{C}^5$ asociado a la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Entonces el polinomio mínimo de T es

$$\mu_T(x) = (x-7)(x-9)^2.$$

Pongamos $p_1(x) = x - 7$, $p_2(x) = x - 9$ y calculamos W_1 y W_2:

$$W_1 = \ker(T - 7I) = \ell(e_1, e_2, e_3), \qquad W_2 = \ker((T - 9I)^2) = \ell(e_4, e_5).$$

4. Ejemplo. Sea T el operador lineal en $\mathbb{R}^4$ asociado a la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Aquí el polinomio mínimo de T es

$$\mu_T(x) = (x^2 + 1)(x - 5).$$

Pongamos $p_1(x) = x^2 + 1$, $p_2(x) = x - 5$ y calculamos W_1 y W_2:

$$W_1 = \ker(T^2 + I) = \ell(e_1, e_2), \qquad W_2 = \ker(T - 5I) = \ell(e_3, e_4).$$