Operaciones lineales en $\mathbb{R}^n$ y sus propiedades

Ejercicios

Objetivos. Aprender a demostrar propiedades de las operaciones lineales en $\mathbb{R}^n$.

Requisitos. Propiedades de las operaciones lineales en $\mathbb{R}^3$ y su demostración.

Explicar notaciones y justificar igualdades

Es importante comprender bien el significado de cada notación y justificar correctamente las fórmulas.

Ejemplo. Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Indicar las correspondencias exactas entre las notaciones y sus significados:

$\alpha\beta + \alpha\gamma$	la suma de los productos $\alpha\beta$ y $\alpha\gamma$
$\alpha(\beta + \gamma)$	el producto del número α por la suma $\beta + \gamma$

Ejemplo. Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Explicar por qué $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$:

- ○ Por la propiedad conmutativa de la adición en $\mathbb{R}$.
- ○ Por la propiedad asociativa de la adición en $\mathbb{R}$.
- ○ Por la definición de la multiplicación en $\mathbb{R}$.
- ✓ Por la propiedad distributiva en $\mathbb{R}$.

Dos estilos de trabajar con n-tuplas

Primer estilo: escribir tuplas. La n-tupla con componentes $a_1, \ldots, a_n$ se denota brevemente por $\big[a_k\big]_{k=1}^{n}$.

1. Sea $a = \big[a_k\big]_{k=1}^{n} \in \mathbb{R}^n$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Establezca las correspondencias exactas entre las notaciones y sus significados:

$\big[\lambda a\big]_{k=1}^{n}$	el producto de λ por $\big[a_k\big]_{k=1}^{n}$
$\lambda\big[a_k\big]_{k=1}^{n}$	la n-tupla con componentes λa_k

2. Sea $a = \big[a_k\big]_{k=1}^{n} \in \mathbb{R}^n$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Explique por qué $\lambda\big[a_k\big]_{k=1}^{n} = \big[\lambda a_k\big]_{k=1}^{n}$:

- ○ Por la propiedad conmutativa de la multiplicación en $\mathbb{R}^n$.
- ○ Por la definición del producto de un vector del espacio $\mathbb{R}^n$ por un escalar.
- ○ Por la propiedad conmutativa de la multiplicación en $\mathbb{R}$.
- ○ Por la definición de n-tupla.

Segundo estilo: escribir una componente general. Dada una n-tupla $a \in \mathbb{R}^n$, su k-ésima componente se denota por a_k.

3. Sean $a \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $k \in \{1, \ldots, n\}$. Establezca las correspondencias exactas entre las notaciones y sus significados:

$(\lambda a)_k$	la k-ésima componente del producto de λ por a
λa_k	λ multiplicado por la k-ésima componente de a

4. Sean $a \in \mathbb{R}^n$, sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y sea $k \in \{1, \ldots, n\}$. Explique por qué $(\lambda a)_k = \lambda a_k$:

- ○ Por la definición del producto de un vector del espacio $\mathbb{R}^n$ por un escalar.
- ○ Por la propiedad conmutativa de la multiplicación en $\mathbb{R}$.
- ○ Por la propiedad conmutativa de la multiplicación en $\mathbb{R}^n$.
- ○ Por propiedades de subíndices.

5. Sean $a, b \in \mathbb{R}^n$. Escriba a qué conjuntos pertenecen los siguientes objetos:

$$a_1 \in \qquad\qquad b_n \in$$

$$a_1 + b_1 \in \qquad\qquad \left[a_k + b_k\right]_{k=1}^n \in$$

6. Sea $a = \left[a_k\right]_{k=1}^n$ y sea $b = \left[b_k\right]_{k=1}^n$. Establezca las correspondencias exactas entre las notaciones y sus significados:

$\boxed{\left[a_k\right]_{k=1}^n + \left[b_k\right]_{k=1}^n}$ — la n-tupla con componentes $a_k + b_k$

$\boxed{\left[a_k + b_k\right]_{k=1}^n}$ — la suma de las n-tuplas $\left[a_k\right]_{k=1}^n$ y $\left[b_k\right]_{k=1}^n$

7. Sea $a = \left[a_k\right]_{k=1}^n$ y sea $b = \left[b_k\right]_{k=1}^n$. Explique por qué $\left[a_k\right]_{k=1}^n + \left[b_k\right]_{k=1}^n = \left[a_k + b_k\right]_{k=1}^n$:

- ○ Por la propiedad distributiva en $\mathbb{R}$.
- ○ Por la definición de la adición en $\mathbb{R}^n$.
- ○ Por la propiedad conmutativa de la adición en $\mathbb{R}$.
- ○ Por la definición de n-tuplas.

8. Sean $a, b \in \mathbb{R}^n$ y sea $k \in \{1, \ldots, n\}$. Establezca las correspondencias exactas entre las notaciones y sus significados:

$\boxed{a_k + b_k}$ — la k-ésima componente de la suma a y b

$\boxed{(a + b)_k}$ — la suma de las k-ésimas componentes de a y b

9. Sean $a, b \in \mathbb{R}^n$ y sea $k \in \{1, \ldots, n\}$. Explique por qué $(a + b)_k = a_k + b_k$:

- ○ Por la propiedad distributiva en $\mathbb{R}$.
- ○ Por las propiedades generales de los subíndices.
- ○ Por la propiedad conmutativa de la adición en $\mathbb{R}$.
- ○ Por la definición de la adición en $\mathbb{R}^n$.

Definición de las operaciones lineales en $\mathbb{R}^n$

10. Definición de la suma de dos elementos de $\mathbb{R}^n$.
Sean $a = \big[a_k\big]_{k=1}^n, b = \big[b_k\big]_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n$. Entonces la *suma* de a y b se define de la siguiente manera:

$$a + b \coloneqq \big[\qquad\qquad\big]_{k=\quad} .$$

En otras palabras,

$$a + b \in \underbrace{\qquad\quad}_{?}$$

y

$$\forall k \in \{\underbrace{\qquad\qquad}_{?}\} \qquad\qquad (a+b)_k = \underbrace{\qquad\qquad\quad}_{?} .$$

11. Definición del producto de un número real por un elemento de $\mathbb{R}^n$.
Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $a = \big[a_k\big]_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n$. Entonces el *producto* de λ por a se define de la siguiente manera:

$$\lambda a \coloneqq \big[\qquad\quad\big]_{k=\quad} .$$

En otras palabras,

$$\lambda a \in \underbrace{\qquad\quad}_{?}$$

y

$$\forall k \in \{\underbrace{\qquad\qquad}_{?}\} \qquad\qquad (\lambda a)_k = \underbrace{\qquad\qquad}_{?} .$$

Demostración de la propiedad asociativa de la adición en $\mathbb{R}^n$

12. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que

$$(a + b) + c = a + (b + c). \tag{1}$$

Primera demostración. Usamos la siguiente notación para las componentes de las tuplas a, b, c:

$$a = \big[a_k\big]_{k=1}^n, \qquad b = \big[\qquad\big]_{k=1}^n, \qquad c = \big[\qquad\big]_{k=} \quad .$$

Vamos a transformar la expresión $(a + b) + c$ que está escrita en el lado izquierdo de la fórmula (1) en la expresión $a + (b + c)$ escrita en el lado derecho de la misma fórmula.

$$\begin{aligned}
(a + b) + c &\overset{\text{(i)}}{=\!=} \left(\big[a_k\big]_{k=1}^n + \big[b_k\big]_{k=1}^n\right) + \big[c_k\big]_{k=1}^n \\
&\overset{\text{(ii)}}{=\!=} \big[\qquad\qquad\big]_{k=1}^n + \big[c_k\big]_{k=1}^n \\
&\overset{\text{(iii)}}{=\!=} \Big[(a_k + b_k) + c_k\Big]_{k=} \\
&\overset{\text{(iv)}}{=\!=} \Big[\qquad\qquad\qquad\Big]_{k=} \\
&\overset{\text{(v)}}{=\!=} \big[a_k\big]_{k=1}^n + \big[\qquad\qquad\big]_{k=1}^n \\
&\overset{\text{(vi)}}{=\!=} \big[\qquad\big]_{k=} + \left(\big[\qquad\big]_{k=} + \big[\qquad\big]_{k=}\right) \\
&\overset{\text{(vii)}}{=\!=} a + (b + c).
\end{aligned}$$

Justificación:

(i) Notación para las componentes de las tuplas a, b, c.

(ii) Definición de la adición en $\mathbb{R}^n$.

(iii) Definición de la suma de dos elementos de $\mathbb{R}^n$.

(iv)

(v) Definición de la suma de dos elementos de $\mathbb{R}^n$.

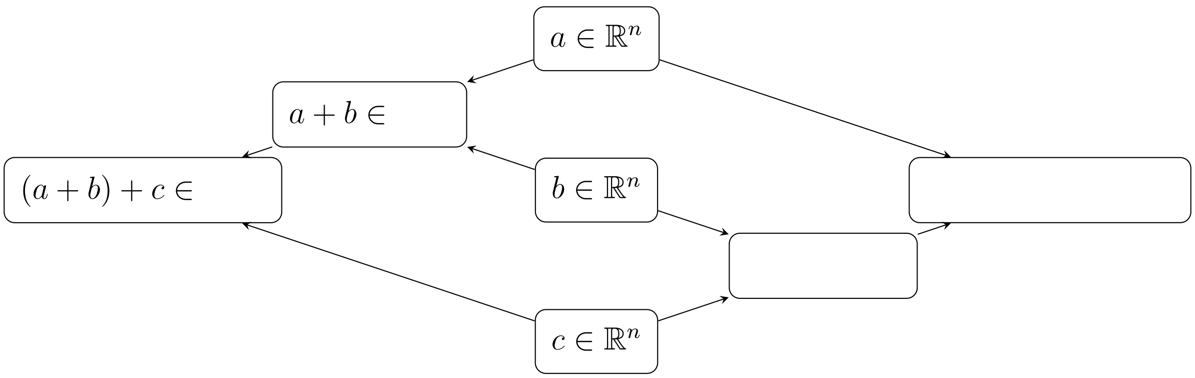
(vi)

(vii) $\square$

13. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que

$$(a + b) + c = a + (b + c). \tag{2}$$

Segunda demostración. Primero verifiquemos que las tuplas $(a + b) + c$ y $a + (b + c)$ son de la misma longitud. Por la definición de la adición en $\mathbb{R}^n$ obtenemos lo siguiente:



Ahora elijamos un índice arbitrario $k \in \{1, \ldots, n\}$ y demostremos que la k-ésima componente de $(a + b) + c$ es igual a la k-ésima componente de $a + (b + c)$.

$$\begin{aligned}
\big((a + b) + c\big)_k &\overset{\text{(i)}}{=\!=} (a + b)_k + c_k \\
&\overset{\text{(ii)}}{=\!=} (a_k + b_k) + c_k \\
&\overset{\text{(iii)}}{=\!=} \\
&\overset{\text{(iv)}}{=\!=} \\
&\overset{\text{(v)}}{=\!=} \big(a + (b + c)\big)_k.
\end{aligned}$$

Justificación:

(i) Definición de la suma de dos elementos de $\mathbb{R}^n$.

(ii)

(iii) La ley asociativa para la adición en $\mathbb{R}$.

(iv) Definición de la adición en $\mathbb{R}^n$.

(v) $\square$

Demostración de la propiedad distributiva de la multiplicación por escalares en $\mathbb{R}^n$ con respecto a la adición en $\mathbb{R}^n$

14. Sean $a, b \in \mathbb{R}^n$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Demuestre que

$$\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b. \tag{3}$$

Primera demostración. Usamos la siguiente notación para las componentes de las tuplas a y b:

$$a = \big[a_k\big]_{k=1}^n, \qquad b = \big[\qquad\big]_{k=1}^n.$$

Vamos a transformar la expresión $\lambda(a+b)$ escrita en el lado izquierdo de la fórmula (3) en la expresión $\lambda a + \lambda b$ escrita en el lado derecho de la misma fórmula.

$$\begin{aligned}
\lambda(a+b) &\overset{\text{(i)}}{=\!=} \lambda\Big(\big[a_k\big]_{k=1}^n + \big[b_k\big]_{k=1}^n\Big) \\
&\overset{\text{(ii)}}{=\!=} \lambda\big[\qquad\qquad\big]_{k=1}^n \\
&\overset{\text{(iii)}}{=\!=} \Big[\lambda(a_k+b_k)\Big]_{k=} \\
&\overset{\text{(iv)}}{=\!=} \Big[\qquad\qquad\qquad\Big]_{k=} \\
&\overset{\text{(v)}}{=\!=} \big[\lambda a_k\big]_{k=1}^n + \big[\qquad\qquad\big]_{k=1}^n \\
&\overset{\text{(vi)}}{=\!=} \lambda\big[\quad\big]_{k=} + \lambda\big[\quad\big]_{k=} \\
&\overset{\text{(vii)}}{=\!=}
\end{aligned}$$

Justificación:

(i) Notación para las componentes de las tuplas a y b.

(ii)

(iii) Definición del producto por escalares en $\mathbb{R}^n$.

(iv) Propiedad distributiva en $\mathbb{R}$.

(v)

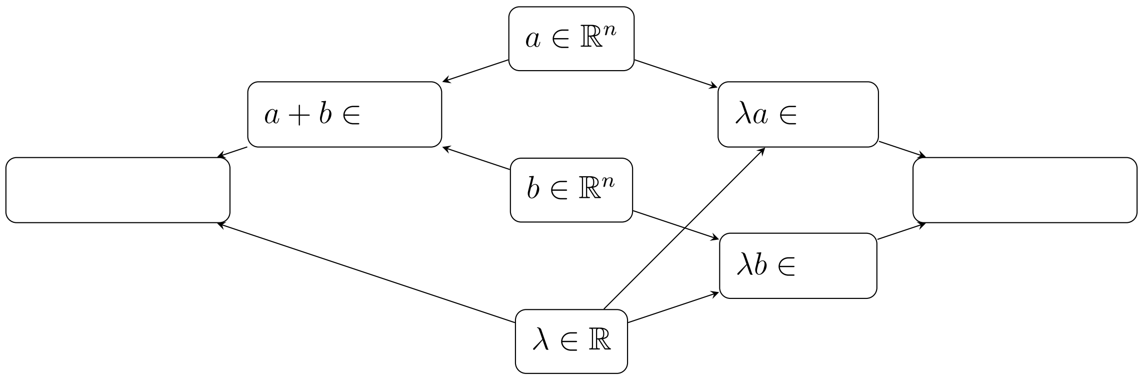
(vi)

(vii) $\square$

15. Sean $a, b \in \mathbb{R}^n$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Demuestre que

$$\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b. \tag{4}$$

Segunda demostración. Primero verifiquemos que las tuplas $\lambda(a+b)$ y $\lambda a + \lambda b$ son de la misma longitud. Por la definición de las operaciones lineales en $\mathbb{R}^n$ obtenemos lo siguiente:



Ahora elijamos un índice arbitrario $k \in \{1, \ldots, n\}$ y demostremos que la k-ésima componente de $\lambda(a+b)$ es igual a la k-ésima componente de $\lambda a + \lambda b$.

$$\begin{aligned}
\big(\lambda(a+b)\big)_k &\overset{\text{(i)}}{=\!=} \lambda(a+b)_k \\
&\overset{\text{(ii)}}{=\!=} \lambda(a_k + b_k) \\
&\overset{\text{(iii)}}{=\!=} \\
&\overset{\text{(iv)}}{=\!=} \\
&\overset{\text{(v)}}{=\!=} \big(\lambda a + \lambda b\big)_k.
\end{aligned}$$

Justificación:

(i) Definición del producto por escalar en $\mathbb{R}^n$.

(ii)

(iii)

(iv)

(v) Definición de la suma de dos elementos de $\mathbb{R}^n$. $\square$