Conjunto $\mathbb{R}^n$ y operaciones lineales en $\mathbb{R}^n$

Objetivos. Definir el conjunto $\mathbb{R}^n$ y operaciones lineales en $\mathbb{R}^n$, estudiar propiedades de las últimas.

Requisitos. Conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, propiedades de las operaciones aritméticas en $\mathbb{R}$. Se recomienda estudiar primero $\mathbb{R}^3$.

Definición del conjunto $\mathbb{R}^n$

1. Definición (n-tupla de números reales). Una secuencia (lista) de n números reales se llama *n-tupla de números reales*. Si a es una n-tupla de números reales, entonces denotamos sus *componentes* (*entradas*) por $a_1, \ldots, a_n$.

2. Notación para la tupla que consiste de los números dados. Si $\beta_1, \ldots, \beta_n$ son algunos números reales, entonces para la tupla que consiste de estos números usamos la siguiente notación:

$$\left[\beta_k\right]_{k=1}^n.$$

Notemos que

$$a = \left[a_k\right]_{k=1}^n.$$

3. Definición (igualdad de tuplas). Sean a y b algunas tuplas de números reales. Se dice que a y b son *iguales* si son de la misma longitud y todas sus componentes correspondientes son iguales:

$$\left[a_k\right]_{k=1}^m = \left[b_k\right]_{k=1}^n \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Big(m = n \qquad \text{y} \qquad \forall k \in \{1, \ldots, n\} \qquad a_k = b_k\Big).$$

4. Observación. Hay diferencias entre la igualdad de tuplas y la igualdad de conjuntos. En las tuplas es importante el orden de los elementos:

$$\{7, -2, 4\} = \{4, -2, 7\}, \qquad \text{pero} \qquad \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Además,

$$\{-5, 1, -5\} = \{-5, 1\}, \qquad \text{pero} \qquad \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

5. Notación $\mathbb{R}^n$ para el conjunto de todas las n-tuplas de números reales. Sea n un número entero positivo. Denotemos por $\mathbb{R}^n$ al conjunto de todas las n-tuplas de números reales. En el curso de Álgebra Lineal (Álgebra II y Álgebra III) es cómodo escribir elementos de $\mathbb{R}^n$ como columnas. Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} -3 \\ \sqrt{2} \\ \pi \\ -8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4, \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ -\ln(5) \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Operaciones lineales en $\mathbb{R}^n$

6. Definición (suma de dos n-tuplas). La *adición* de n-tuplas se define *por componentes* (*entrada por entrada*):

$$\big[a_k\big]_{k=1}^n + \big[b_k\big]_{k=1}^n := \big[a_k + b_k\big]_{k=1}^n.$$

En otras palabras, si $a, b \in \mathbb{R}^n$, entonces $a + b$ se define como un elemento de $\mathbb{R}^n$ cuya k-ésima componente es igual a

$$(a+b)_k = a_k + b_k \qquad (k \in \{1, \ldots, n\}).$$

7. Definición (producto de una n-tupla por un número). La *multiplicación de n-tuplas por números* se define por componentes (o sea *entrada por entrada*):

$$\lambda\big[a_k\big]_{k=1}^n := \big[\lambda a_k\big]_{k=1}^n.$$

En otras palabras, si $a \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces λa es un elemento de $\mathbb{R}^n$ tal que

$$(\lambda a)_k = \lambda a_k \qquad (k \in \{1, \ldots, n\}).$$

8. Ejemplos.

$$\begin{bmatrix} 7\sqrt{2} \\ -1.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5\sqrt{2} \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} \\ 4.5 \end{bmatrix}, \qquad \sqrt{3}\begin{bmatrix} 5 \\ -\sqrt{3} \\ 0 \\ \frac{2}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\sqrt{3} \\ -3 \\ 0 \\ \frac{2\sqrt{3}}{7} \end{bmatrix}.$$

9. Definición (vectores aritméticos). Las n-tuplas reales consideradas con estas operaciones se llaman a menudo *vectores aritméticos reales*. Cuando se consideran los productos de la forma λa, donde $\lambda \in \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}^n$, los números λ se llaman *escalares*.

Propiedades asociativa y conmutativa de la adición en $\mathbb{R}^n$

Recordemos que la adición de los números reales cumple con la propiedad asociativa:

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \qquad (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma). \tag{1}$$

Vamos a demostrar una propiedad similar en $\mathbb{R}^n$ basándonos en la propiedad (1) y en la definición de la adición en $\mathbb{R}^n$.

10. Propiedad asociativa de la adición en $\mathbb{R}^n$.

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}^n \qquad (a + b) + c = a + (b + c). \tag{2}$$

Primera demostración.

$$\begin{aligned}
(a+b)+c &\overset{\text{(i)}}{=\!=} \Big(\big[a_k\big]_{k=1}^n + \big[b_k\big]_{k=1}^n \Big) + \big[c_k\big]_{k=1}^n \\
&\overset{\text{(ii)}}{=\!=} \big[a_k + b_k\big]_{k=1}^n + \big[c_k\big]_{k=1}^n \\
&\overset{\text{(iii)}}{=\!=} \Big[(a_k + b_k) + c_k\Big]_{k=1}^n \\
&\overset{\text{(iv)}}{=\!=} \Big[a_k + (b_k + c_k)\Big]_{k=1}^n \\
&\overset{\text{(v)}}{=\!=} \big[a_k\big]_{k=1}^n + \big[b_k + c_k\big]_{k=1}^n \\
&\overset{\text{(vi)}}{=\!=} \big[a_k\big]_{k=1}^n + \Big(\big[b_k\big]_{k=1}^n + \big[c_k\big]_{k=1}^n \Big) \\
&\overset{\text{(vii)}}{=\!=} a + (b + c).
\end{aligned}$$

Justificación de los pasos:

(i), (vii)	notación para las entradas de a, b, c,
(ii), (iii), (v), (vi)	definición de la adición en $\mathbb{R}^n$,
(iv)	propiedad asociativa en $\mathbb{R}$.

□

Segunda demostración. Primero verifiquemos que las tuplas $(a+b)+c$ y $a+(b+c)$ tienen la misma longitud. En efecto, de la definición de la adición en $\mathbb{R}^n$ concluimos que todas las tuplas $a + b$, $(a + b) + c$, $b + c$ y $a + (b + c)$ tienen longitud n.

Demostremos que las componentes correspondientes de las tuplas $(a+b)+c$ y $a+(b+c)$ son iguales. Elijamos arbitrariamente un índice $k \in \{1, \ldots, n\}$ y demostremos que la k-ésima componente de $(a + b) + c$ es igual a la k-ésima componente de $a + (b + c)$.

$$\begin{aligned}
\big((a+b)+c\big)_k &\overset{\text{(i)}}{=\!=} (a+b)_k + c_k \overset{\text{(ii)}}{=\!=} (a_k + b_k) + c_k \\
&\overset{\text{(iii)}}{=\!=} a_k + (b_k + c_k) \overset{\text{(iv)}}{=\!=} a_k + (b+c)_k \overset{\text{(v)}}{=\!=} \big(a + (b+c)\big)_k.
\end{aligned}$$

En los pasos (i), (ii), (iv) y (v) usamos la definición de la adición en $\mathbb{R}^n$. En el paso (iii) aplicamos la propiedad asociativa de la adición en $\mathbb{R}$. □

11. Propiedad conmutativa de la adición en $\mathbb{R}^n$.

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^n \qquad a + b = b + a.$$

12. Ejercicio. Demuestre la propiedad de arriba de dos maneras diferentes. ¡Justifique cada paso!.

Tupla nula, tupla opuesta y sus propiedades principales

13. Definición de la tupla nula. La n-tupla $\big[0\big]_{k=1}^n$ se denota por $\mathbf{0}_n$ y se llama la n-tupla *nula*:

$$\mathbf{0}_n \coloneqq \big[0\big]_{k=1}^n.$$

En otras palabras la tupla $\mathbf{0}_n$ tiene longitud n y todas sus componentes son nulas:

$$\mathbf{0}_n \in \mathbb{R}^n, \qquad\qquad \forall k \in \{1, \ldots, n\} \quad \big(\mathbf{0}_n\big)_k = 0.$$

14. Propiedad principal de la tupla nula. La n-tupla nula $\mathbf{0}_n$ es un *elemento neutro con respecto a la adición*:

$$\forall a \in \mathbb{R}^n \qquad a + \mathbf{0}_n = \mathbf{0}_n + a = a.$$

Como ya sabemos que la adición en $\mathbb{R}^n$ es conmutativa, es suficiente demostrar solamente la igualdad $a + \mathbf{0}_n = a$.

Primera demostración. Denotemos las componentes del vector a por a_k:

$$a = \big[a_k\big]_{k=1}^n.$$

Mostremos que $a + \mathbf{0}_n$ y a son iguales:

$$a + \mathbf{0}_n \quad \overset{\text{(i)}}{=\!=} \quad \big[a_k\big]_{k=1}^n + \big[0\big]_{k=1}^n \quad \overset{\text{(ii)}}{=\!=} \quad \big[a_k + 0\big]_{k=1}^n \quad \overset{\text{(iii)}}{=\!=} \quad \big[a_k\big]_{k=1}^n \quad \overset{\text{(iv)}}{=\!=} \quad a.$$

Justificación de los pasos:

(i), (iv)	notación para las entradas de a, definición de $\mathbf{0}_n$,
(ii)	definición de la suma en $\mathbb{R}^n$,
(iii)	propiedad principal del número real 0.

□

Segunda demostración. De la definición de la suma en $\mathbb{R}^n$ sigue que la tupla $a + \mathbf{0}_n$ tiene la misma longitud n que la tupla a.

Sea $k \in \{1, \ldots, n\}$ un índice arbitrario. Mostremos que las k-ésimas componentes de las tuplas $a + \mathbf{0}_n$ y a son iguales:

$$\big(a + \mathbf{0}_n\big)_k \overset{\text{(i)}}{=\!=} a_k + \big(\mathbf{0}_n\big)_k \overset{\text{(ii)}}{=\!=} a_k + 0 \overset{\text{(iii)}}{=\!=} a_k.$$

Justificación de los pasos:

(i) definición de la suma en $\mathbb{R}^n$;

(ii) definición de la tupla $\mathbf{0}_n$;

(iii) propiedad principal del número real 0. □

15. Definición de la tupla opuesta (inversa aditiva). Sea $a \in \mathbb{R}^n$. Entonces la tupla $\big[-a_k\big]_{k=1}^n$ se denota por $-a$ y se llama la tupla *opuesta* o *inversa aditiva* a la tupla a.

16. Ejercicio (propiedad principal de la tupla opuesta). Demuestre que para todo $a \in \mathbb{R}^n$,

$$a + (-a) = (-a) + a = \mathbf{0}_n.$$

Propiedades distributivas en $\mathbb{R}^n$

17. Recordamos la ley distributiva en $\mathbb{R}$:

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \qquad (\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma.$$

Demuestre las siguientes propiedades:

18. Propiedad distributiva de la multiplicación por escalares en $\mathbb{R}^n$ con respecto a la adición de escalares.

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \forall a \in \mathbb{R}^n \qquad (\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a.$$

19. Propiedad distributiva de la multiplicación por escalares en $\mathbb{R}^n$ con respecto a la adición de vectores.

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^n \qquad \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b.$$

Otras propiedades de la multiplicación por escalares en $\mathbb{R}^n$

Demuestre las siguientes propiedades:

20. Propiedad de la multiplicación de vectores en $\mathbb{R}^n$ por el escalar uno.

$$\forall a \in \mathbb{R}^n \qquad 1\, a = a.$$

21. Acordancia de la multiplicación por escalares en $\mathbb{R}^n$ con la multiplicación de escalares.

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \forall a \in \mathbb{R}^n \qquad \lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a.$$

Nota: estas dos propiedades no tienen nombres estándares.