Conjunto $\mathbb{R}^3$ y operaciones lineales en $\mathbb{R}^3$

Objetivos. Definir el conjunto $\mathbb{R}^3$ y operaciones lineales en $\mathbb{R}^3$.

Requisitos. Conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, propiedades de las operaciones aritméticas en $\mathbb{R}$.

Definición del conjunto $\mathbb{R}^3$

1. Definición (tripla de números reales). Una secuencia (lista ordenada) de tres números reales

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

se llama *tripla* (tripleta, terna, triada) de números reales. El orden de los elementos es importante. Los números a_1, a_2, a_3 se llaman *componentes* o *entradas* de esta tripla.

2. Nota acerca de la notación. Se usan también otras notaciones:

$$(a_1, a_2, a_3), \qquad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \qquad [a_1, a_2, a_3].$$

3. Notación para las componentes de una tripla. Si $a \in \mathbb{R}^3$, entonces denotemos por a_1, a_2, a_3 las componentes de a. Por ejemplo,

$$\text{si} \qquad a = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \text{entonces} \qquad a_2 = -4.$$

4. Definición (igualdad de triplas de números reales). Dos triplas de números reales se llaman *iguales* si todas sus componentes correspondientes son iguales:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad a_3 = b_3.$$

5. Definición (conjunto $\mathbb{R}^3$). El conjunto de todas las triplas de números reales se denota por $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbb{R}^3 := \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} : \quad a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

6. Ejemplo. Las siguientes triplas son dos representaciones del mismo elemento de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{8} \\ \ln(3) - \ln(2) \\ \operatorname{sen} \pi \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} \\ \ln(3/2) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Definición de las operaciones lineales en $\mathbb{R}^3$

7. Definición (suma de dos triplas). La *adición* de triplas se define *por componentes* (*entrada por entrada*):

$$\text{Si}\quad \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3, \qquad \text{entonces} \qquad \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{bmatrix}.$$

8. Observación. Si $a, b \in \mathbb{R}^3$, entonces $a + b \in \mathbb{R}^3$. Cada componente de $a + b$ es la suma de las componentes correspondientes de a y b:

$$\forall k \in \{1, 2, 3\} \qquad (a + b)_k = a_k + b_k.$$

9. Definición (producto de una tripla real por un número real). La *multiplicación de triplas reales por números reales* se define por componentes (o sea *entrada por entrada*):

$$\lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{bmatrix}.$$

10. Observación. Si $a \in \mathbb{R}^3$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces λa es un elemento de $\mathbb{R}^3$. Cada componente de λa es el producto de la componente correspondiente de a por el número λ:

$$\forall k \in \{1, 2, 3\} \qquad (\lambda a)_k = \lambda a_k.$$

11. Ejemplos.

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ -2.3 \\ \log_2(5) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 6.1 \\ \log_2(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{12} \\ 3.8 \\ \log_2(35) \end{bmatrix}, \qquad 3 \begin{bmatrix} \frac{8}{3} \\ \log_2 5 \\ 0.33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ \log_2 125 \\ 0.99 \end{bmatrix}.$$

12. Definición (vectores aritméticos de longitud 3). Las triplas reales consideradas con estas operaciones se llaman a menudo *vectores aritméticos reales de longitud* 3 o *vectores del espacio* $\mathbb{R}^3$. Al trabajar con productos de la forma λa, donde $\lambda \in \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}^3$, los números λ suelen denominarse *escalares*. Las operaciones de la suma y del producto por escalar definidas arriba se llaman *operaciones lineales* en $\mathbb{R}^3$.

Propiedades asociativa y conmutativa de la adición en $\mathbb{R}^3$

13. Propiedad asociativa de la adición. Las operaciones en $\mathbb{R}^3$ tienen muchas propiedades "naturales". En particular, la adición en $\mathbb{R}^3$ es asociativa:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}^3 \qquad (a + b) + c = a + (b + c). \tag{1}$$

14. Observación antes de la demostración. Recordemos que una propiedad similar se cumple para números reales:

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \qquad (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma). \tag{2}$$

Ahora vamos a demostrar la propiedad (1) usando la definición de la suma en $\mathbb{R}^3$ y la propiedad (2).

Demostración. Usamos la notación estándar para las componentes de las triplas a, b, c:

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \qquad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
(a + b) + c \quad &\overset{\text{(i)}}{=\!=} \quad \left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad \overset{\text{(ii)}}{=\!=} \quad \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \\
&\overset{\text{(iii)}}{=\!=} \quad \begin{bmatrix} (a_1 + b_1) + c_1 \\ (a_2 + b_2) + c_2 \\ (a_3 + b_3) + c_3 \end{bmatrix} \quad \overset{\text{(iv)}}{=\!=} \quad \begin{bmatrix} a_1 + (b_1 + c_1) \\ a_2 + (b_2 + c_2) \\ a_3 + (b_3 + c_3) \end{bmatrix} \\
&\overset{\text{(v)}}{=\!=} \quad \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 + c_1 \\ b_2 + c_2 \\ b_3 + c_3 \end{bmatrix} \quad \overset{\text{(vi)}}{=\!=} \quad \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \right) \\
&\overset{\text{(vii)}}{=\!=} \quad a + (b + c).
\end{aligned}$$

En los pasos (i) y (vii) usamos la notación para las componentes de a, b, c, en los pasos (ii) y (iii) usamos la definición de la suma en $\mathbb{R}^3$, en el paso (iv) aplicamos la propiedad asociativa de la adición en $\mathbb{R}$, y en los pasos (v) y (vi) otra vez usamos la definición de la suma en $\mathbb{R}^3$. □

15. Ejercicio (propiedad conmutativa de la adición en $\mathbb{R}^3$). Demuestre que:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^3 \qquad a + b = b + a.$$

¡Justifique cada paso!.

Tripla nula, tripla opuesta y sus propiedades principales

16. Definición de la tripla nula. La *tripla nula* tiene todas las componentes nulas. La denotamos por $\mathbf{0}_3$:

$$\mathbf{0}_3 \coloneqq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

17. Propiedad principal de la tripla nula. Para todo $a \in \mathbb{R}^3$,

$$a + \mathbf{0}_3 = \mathbf{0}_3 + a = a.$$

Podemos decir que la tripla nula es un *elemento neutro con respecto a la adición.*

Demostración.

$$a + \mathbf{0}_3 \overset{\text{(i)}}{=\!=} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \overset{\text{(ii)}}{=\!=} \begin{bmatrix} a_1 + 0 \\ a_2 + 0 \\ a_3 + 0 \end{bmatrix} \overset{\text{(iii)}}{=\!=} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \overset{\text{(iv)}}{=\!=} a.$$

Justificación:

(i) Notación para las componentes de a.

(ii) Definición de la suma en $\mathbb{R}^3$.

(iii) Propiedad principal del número 0: para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha + 0 = \alpha$.

(iv) Notación para las componentes de a.

La otra igualdad $\mathbf{0}_3 + a = a$ sigue de la igualdad $a + \mathbf{0}_3 = a$ que acabamos de demostrar y de la ley conmutativa en $\mathbb{R}^3$. □

18. Definición de la tripla opuesta (inversa aditiva). Sea

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

La tripla *opuesta* (o *inversa aditiva*) a la tripla a se denota por $-a$ y se define de la siguiente manera:

$$-\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \coloneqq \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{bmatrix}.$$

19. Propiedad principal de la tripla opuesta (inversa aditiva). Sea $a \in \mathbb{R}^3$. Entonces

$$a + (-a) = (-a) + a = \mathbf{0}_3.$$

20. Ejercicio. Demuestre la propiedad principal de la tripla opuesta usando el hecho que para todo número real α se tiene la igualdad $\alpha + (-\alpha) = 0$.

Leyes distributivas en $\mathbb{R}^3$

21. Ejercicio (propiedad distributiva de la multiplicación de vectores por escalares en $\mathbb{R}^3$ con respecto a la adición de escalares). Justificando cada paso escriba la demostración de la siguiente propiedad:

$$\forall a \in \mathbb{R}^3 \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \qquad (\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a.$$

Use la ley distributiva en $\mathbb{R}$:

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \qquad (\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma.$$

22. Ejercicio (propiedad distributiva de la multiplicación de vectores por escalares en $\mathbb{R}^3$ con respecto a la adición de vectores). Demuestre que

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^3 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b.$$

Otras propiedades de la multiplicación por escalares en $\mathbb{R}^3$

23. Propiedad de la multiplicación por el número uno.

$$\forall a \in \mathbb{R}^3 \qquad 1\,a = a.$$

Demostración. Sea

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$1\,a \overset{\text{(i)}}{=\!=} 1 \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \overset{\text{(ii)}}{=\!=} \begin{bmatrix} 1 \cdot a_1 \\ 1 \cdot a_2 \\ 1 \cdot a_3 \end{bmatrix} \overset{\text{(iii)}}{=\!=} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \overset{\text{(iv)}}{=\!=} a.$$

Justificación:

(i) Notación para las componentes de la tripla a.

(ii) Definición del producto de elementos de $\mathbb{R}^3$ por números reales.

(iii) Propiedad de la unidad en $\mathbb{R}$: $1 \cdot \alpha = \alpha$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

(iv) Notación para las componentes de la tripla a. □

24. Ejercicio. Demuestre la siguiente propiedad:

$$\forall a \in \mathbb{R}^3 \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \qquad \lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a.$$